Bases ordenadas y coordenadas

1. Sean S_1 y $S_2 = \{(1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$ dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$[I]_{S_1}^{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de la base S_1 a la base S_2

(a) Determine la base S_1

Solución:

Sea $S_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$. Si la matriz de cambio de base es $[I]_{S_1}^{S_2}$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1(1,0,1) + 0(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (2,1,2) \\ u_2 &= -1(1,0,1) - 2(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (4,-1,0) \\ u_3 &= 1(1,0,1) + 1(-1,1,0) + 1(1,1,1) = (1,2,2) \end{aligned}$$

De donde : $S_1 = \{(2,1,2), (4,-1,0), (1,2,2)\}$

(b) Para $\alpha = (1,2,3)$, determine $[\alpha]_{S_1}$

Solución:

Si

$$[\alpha]_{S_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow (1,2,3) = a(2,1,2) + b(4,-1,0) + c(1,2,2)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 1 = 2a + 4b + c \\ 2 = a - b + 2c \\ 3 = 2a + 2c \end{cases}$$

$$\longrightarrow a = \tfrac{3}{2}\ , b = -\tfrac{1}{2}\ , c = 0$$

$$\longrightarrow [\alpha]_{S_1} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea $\beta = \{(1,0,-1), (-1,1,0), (1,1,1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ y sea $\mu \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$[\mu]_\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre μ.

Solución:

Si

$$[\mu]_\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \mu = 6(1,0,-1) - 3(-1,1,0) + 2(1,1,1) = (11,-1,-4)$$

3. Sea $C = \{1, x, x^2\}$ y $S_2 = \{1 + x + x^2, -2 - x + x^2, -1 + x + x^2\}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$. Hallar $[I]_{S_2}^C$ la matriz cambio de base desde S_2 a la base C

Solución:

Las columnas C_j $(1 \leq j \leq 3)$ de la matriz $[I]_{S_2}^C$ son tales que :

$$C_j = [u_j]_C \text{ donde } u_j \in S_2 \quad \longrightarrow [I]_{S_2}^C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sea V un $k-e.v$ y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V. Se define $\beta = \{w_1, w_2 \cdots, w_n\}$ (otra base de V)como $w_i = \sum_{j=1}^{i} j v_j$

   (a) Determine $[I]_\beta^\alpha$

   Solución:

   De la definición de β se tiene:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sum_{j=1}^{1} j v_j = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\
w_2 &= \sum_{j=1}^{2} j v_j = v_1 + 2v_2 = 1v_1 + 2v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n \\
w_3 &= \sum_{j=1}^{3} j v_j = v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 1v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 0v_4 + \cdots + 0v_n \\
&\vdots \qquad \vdots \\
w_n &= \sum_{j=1}^{n} j v_j = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + nv_n
\end{aligned}$$

   Lo que implica: $[w_1]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, [w_2]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, [w_n]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

   Finalmente $[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & n \end{pmatrix}$

   (b) Si v es un vector de V tal que $[v]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ calcular $[v]_\beta$

   Solución:

Como $[I]_\beta^\alpha$ es invertible y $\left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} = [I]_\alpha^\beta$ y además

$$[I]_\alpha^\beta [v]_\alpha = [v]_\beta$$

entonces: $$\left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/4\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1/n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/4\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [v]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$