Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°3
Coordinador de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Noviembre de 2008

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Autores y Aportes

Profesores: Ricardo Santander, Luis Arancibia, Miguel Carvajal, Emilia Castro, Humberto Chacón, Julián cortés, Lila Narea, Eugenio Rivera y Ayudante Andrés Jablonski

Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente

2. Números Complejos

(1) Encuentre el conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}/p(z) = 0$ para cada uno de los siguientes casos:

(a) $p(z) = z^3 - 2z^2 - 3z$

(b) $p(z) = z^2 + (2i - 3)z + 4$

(c) $p(z) = 5z^2 + 2z + 10$

(d) $p(z) = z^2 + (i - 2)z + 3 + i$

(e) $p(z) = 4z^4 + 3^3 + 2z^2$

(2) Si $w^3 = 1$, demuestre las siguientes proposiciones:

(a) $(i + w^2)^4 = w$

(b) $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$

(c) $(2 + 2w + 5w^2)^6 = 729$

(3) Demuestre que

(a) $(1 + i)(1 + i\sqrt{3})(cos\alpha - isen\alpha) = \sqrt{8}$

(b) $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}cos\frac{n\pi}{3}$

(c) $(1+\frac{i}{\sqrt{3}})^n - (1-\frac{i}{\sqrt{3}})^n = \dfrac{2^{n+1}{}^n}{\sqrt{3}}\ i\,sen(\frac{n\pi}{6})$

(d) $x_n + iy_n = (1+i\sqrt{3})^n \Rightarrow x_{n-1}y_n - x_n y_{n-1} = 2^{n-2}\sqrt{3}$

(e) $x_n + iy_n = (1+i\sqrt{3})^{3n} \Rightarrow x_n + 2^3 x_{n-1} = 0$

(f)

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Re\left(z^{15} + \frac{1}{z}\right) + Re\left(z^{18} - \frac{1}{z}\right) = 0$$

(4) Si α es una de las raíces complejas séptimas de la unidad, demuestre que:
$\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \dfrac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2$

(5) Consideremos que $z = cis\,x$, demuestre que $\dfrac{1+z}{1-z} = i\,ctg(\frac{x}{2})$

(6) Demuestre que

$$z = \frac{1-i}{2} \Rightarrow \sum_{i=0}^{17} z^i - Re\left(z^{16} - \frac{1}{z}\right) + Im\left(-\frac{1}{z}\right) i = 2z$$

(7) Determinar la curva que debe recorrer el complejo z para que $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ sea imaginario puro

(8) Usando complejos muestre que

$$25^2 \cdot 17^2 = 304^2 \cdot 297^2$$

Ayuda: Recuerde los trios pitagóricos.

3. Ejercicios de Polinomios y sus raíces

(1) Dado el polinomio $p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 31x^3 + ax^2 + bx + 30$ en $\mathbb{R}[x]$, determine a y b reales y las raíces del polinomio si se sabe que es divisible por $(x-1)$ y por $(x+1)$

(2) Dado el polinomio $p(x) = 5x^3 + ax^2 + (-8-a)x + b$, determine los valores de a y de b, si el resto de dividir $p(x)$ por $(x-2)$ es 45

(3) Sabiendo que $x - i$ divide al polinomio $p(x) = x^4 - 24x^2 - 25$, obtenga todas las raíces de $p(x)$

(4) Obtenga las raíces de la ecuación $(1+i)x^3 + (1+2i)x^2 - (1+i)x - 1 - 2i = 0$

4. Ejercicios de determinantes e inversa

(1) Calcule los determinante de las siguientes matrices y use las operaciones elementales para calcular su inversa.

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{pmatrix}$ (b) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(2) Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 4$ entonces calcule, si es que existe, la inversa de las siguientes matrices.

(a) $\begin{pmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} b & 3a & c \\ h & 3g & i \\ 2e & 6d & 2f \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} a & b-2a & a-c \\ d & e-2d & d-f \\ g & h-2g & g-i \end{pmatrix}$

(3) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 3 & 3 & 0 & -3 & \dots & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & \dots & -4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & 0 \end{pmatrix} = n!$$

(4) Si

$$A = \begin{pmatrix} x+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & x+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & x+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & x+a^4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(a,x) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

5. Sistemas de Ecuaciones

(1) Reduzca a su forma escalonada por filas de las siguientes matrices.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) Resuelva los siguientes sistemas lineales, calcule en cada caso el rango de la matriz, el rango de la matriz ampliada y especifique si el sistema tiene una, infinita o no tiene solución.

(a) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x & - & 3y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & - & w & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & - & 2w & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 3z & - & w & = & 0 \end{array}\right|$ (b) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 2z & - & w & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & & - & 2w & = & 0 \\ 30x & - & 2y & + & & + & w & = & 0 \\ x & - & y & - & 5z & + & 2w & = & 0 \end{array}\right|$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & - & w & = & 4 \\ x & - & 3y & + & 3z & + & w & = & 9 \\ x & + & 2y & - & z & + & w & = & -5 \\ 3x & + & 3y & - & 2z & + & w & = & -2 \end{array}\right|$ (d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & z & = & 6 \end{array}\right|$

(e) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ \frac{1}{2}x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}\right|$

(3) Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ & + & y & + & cz & = & 2 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine el conjunto $S = \{c \in \mathbb{R} /$ el sistema $(\star)$ no tiene solución $\}$

(4) Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & & & 3z & = & a+1 \\ -ax & + & y & & & = & -a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine :

(i) $S = \{a \in \mathbb{R} /$ el sistema $(*)$ tiene solución $\}$

(ii) $S = \{a \in \mathbb{R} /$ el sistema $(*)$ tiene infinitas soluciones $\}$

(iii) $S = \{a \in \mathbb{R} /$ el sistema $(*)$ no tiene soluciones $\}$

(5) Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine :

(i) $S = \{m \in \mathbb{R} /$ el sistema $(*)$ tiene solución única$\}$

(ii) $S = \{m \in \mathbb{R} /$ el sistema $(*)$ tiene infinitas soluciones$\}$

(iii) $S = \{m \in \mathbb{R} /$ el sistema $(*)$ no tiene soluciones $\}$

BUEN TRABAJO !!!