Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación

Prof. Gabriel Rabanales R.

Guía de ejercicios
Números Complejos (1)

1. Encuentre los números reales x e y tales que: $3(x+2)+2iy-ix+3y=9+5i$
   R: x = -1 , y = 2

2. En los siguientes ejercicios reduzca a la forma binomial: $a+bi$:

   a) $(3+5i)+(5+2i)-(4+7i)^2$ b) $(2+3i)(5-3i)(-4+5i^5)$

   c) $\dfrac{-5-2i}{4+i}+\dfrac{2+5i}{3i}$ d) $\dfrac{3}{4(5-i)(4+6i)}$

   e) $\dfrac{(-5+i)(1+i)}{3-i}+i$ f) $\left[\dfrac{2i^{37}}{(2+i)(3+4i)}\right]^2$

3. Si $z=a+bi$, determine:

   a) $\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{i\operatorname{Im}(iz)}$ b) $\left[1-\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)\right]\left[1-\operatorname{Re}(z)-i\operatorname{Im}(z)\right]$

4. Si $z_1=1+2i$, $z_2=-2+i$, $z_3=-1-i$, calcule:

   a) $2z_1+3z_2+3$ b) $\dfrac{z_1}{iz_2}$ c) $z_1^2+2z_3^2$ d) $\dfrac{z_1+z_3}{1+z_2}$

5. Determine: Re(w) e Im(w) si w es:

   a) z^3 b) $\dfrac{2i}{z}$ c) $\dfrac{3}{z^2}$ donde $z=a+bi$ con $ab\neq 0$

6. Determine $z\in$ £ tal que:

   a) $|z|-z=1+2i$ R: $\dfrac{3}{2}-2i$

   b) $|z|+z=2+i$ R: $\dfrac{3}{4}+i$

   c) $z\cdot\overline{z}+3(z-\overline{z})=4-3i$ R: $\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$, $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

   d) $z\cdot\overline{z}+2z=3+i$

7. Evalúe las siguientes expresiones:

a) $\left|(2-3i)(5+4i)(1+i)\right|$ b) $\left|\frac{(2+i)(-3+4i)(5-3i)}{(3-4i)(5+3i)}\right|$ c) $\left|\frac{(3+5i)(5-2i)}{5+2i}\right|\left|\frac{-2}{3i}\right|$

8. Demuestre que: a) $\forall z\in$ £ $: \overline{z^2}=\bar{z}^{2}$ b) $\left(z-\bar{z}\right)^2 \le 0 \quad \forall z \in$ £

9. Encuentre los números complejos z que satisfacen las dos relaciones siguientes:

$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3}$ y $\left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1$ R: $z=6+17i$; $z=6+8i$

10. La suma de dos números complejos es: 3 + 2i. La parte real de uno de ellos es 2.
El cuociente entre ellos es imaginario puro. Hallar ambos números.

R: $z_1=2+(1+\sqrt{3})i$, $z_2=1+(1-\sqrt{3})i \;\vee\; z_1=2+(1-\sqrt{3})i$, $z_2=1+(1+\sqrt{3})i$

11. Analice si se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\frac{(\overline{2+i})^2}{3-4i}=1$ b) $\left(\overline{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{7i-1}{1+i}=(2+i)^2$

12. Verifique si el número complejo: $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, satisface la ecuación: $\frac{3}{z+1}-\frac{1}{z}=1$

13. Determine $z\in$ £ tal que: $|z|=\frac{1}{|z|}=|1-z|$ R: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

14. Resuelva: $\begin{cases}(1+i)z-iu=2+i\\(2+i)z+(2-i)u=2i\end{cases}$, $z,u\in$ £

15. Si $(w+\frac{1}{w})\in$ ¡ , $w\in$ £ , demuestre que $\mathrm{Im}(w)=0 \vee |w|=1$

16. Calcular:

a) $\left|\frac{z}{w}\right|$ si $\frac{z+w}{z-w}=1+4i$ con $z,w\in$ £

b) $\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{u}\right|$ si $z=3-4i$, $u=4+3i$

c) $\left|\frac{1}{z-z^2}\right|$ si $z=2i$

17. Calcule:

a) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$ b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$

18. Usando De Moivre y Teorema del Binomio demuestre que:

a) $sen(3q)=3sen(q)-4sen^3(q)$

b) $\cos(3q)=4\cos^3(q)-3\cos(q)$

19. Exprese en la forma $a+bi$:

a) $z=\sqrt{-7+24i}$

b) $z=\left(\dfrac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6}$

c) $S=1+\dfrac{1}{1+i}+....+\dfrac{1}{(1+i)^{27}}$

20. Demuestre que:

a) $(1+i)^n=2^{n/2}(\cos\dfrac{np}{4}+isen\dfrac{np}{4})$; $n\in$ ¥

b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^n(\cos\dfrac{np}{6}-isen\dfrac{np}{6})$; $n\in$ ¥

21. Verifique que: $(1+i)(1+i\sqrt{3})(\cos q+isenJ)=2\sqrt{2}\left[\cos(\dfrac{7p}{12}+q)+isen(\dfrac{7p}{12}+q)\right]$

22. Calcule, usando la forma trigonométrica:

a) $(\sqrt{3}+i)(1+i)$ b) $(1+i\sqrt{3})(1-i)$ c) $\dfrac{1-i}{1+i}$

d) $\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ e) $(1-i)^{10}$ f) $(2\sqrt{3}+2i)^6$

g) $(1-i)^{16}+(1+i)$ h) $\dfrac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}$ j) $(1+i)^{42}$

23. Resuelva:

a) $\sqrt[3]{-i}$ b) $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$ c) $\sqrt[4]{1}$

24. Si $e^{ix}=\cos x+i\operatorname{sen}x$ (Fórmula de Euler), demuestre que:

a) $\cos q=\dfrac{e^{iq}+e^{-iq}}{2}$ b) $sen q=\dfrac{e^{iq}-e^{-iq}}{2i}$

25. Usando la fórmula de Euler calcule:

a) $(5cis20^{o})(3cis40^{o})$ R: $\frac{15}{2}+\frac{15}{2}\sqrt{3}i$

b) $(2cis50^{o})^{6}$ R: $32-32\sqrt{3}i$

c) $\frac{(8cis40^{o})^{3}}{(2cis60^{o})^{4}}$ R: $-16-16\sqrt{3}i$

d) $\frac{(3e^{\frac{pi}{6}})(2e^{-\frac{5pi}{4}})(6e^{\frac{5pi}{3}})}{(4e^{\frac{2pi}{3}})^{2}}$ R: $\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i$

26. Encuentre las 5 raíces quintas de la unidad

27. Si $w \neq 1$ es una raíz cúbica de 1 verifique si:

a) $(1+w^{2})^{4} = w$

b) $(1-w+w^{2})(1+w-w^{2}) = 4$

c) $(2+2w+5w^{2})^{6} = 729$

28. Resuelva en £ las ecuaciones:

a) $z^{2}+(2i-3)z+(5-1)=0$ R: $z=2-3i$, $z=1+i$

b) $5z^{2}+2z+10=0$ R: $z=\frac{-1\pm 7i}{5}$

c) $z^{2}+(i-2)z+(3-i)=0$ R: $z=1+i$, $z=1-2i$

29. Si $x_{n}+iy_{n} = (1+i\sqrt{3})^{n}$ $\forall n \in$ ¥ , demuestre que: a) $x_{n-1}y_{n}-x_{n}y_{n-1} = 2^{2n-2}\sqrt{3}$

30. Demuestre que $(1+i\sqrt{3})^{n}+(1-i\sqrt{3})^{n} = 2^{n+1}\cos\frac{np}{3}$

31. Sea $z \neq 1$ una raíz n-ésima de la unidad. Demuestre que para todo natural distinto del uno se cumple: $1+z+z^{2}+\ldots+z^{n-1} = 0$

32. Resuelva las ecuaciones:

a) $x^{4}+8+8i\sqrt{3}=0$ b) $x^{6}+7x^{3}-8=0$

33. Sea $x_{n}+iy_{n} = (1+i\sqrt{3})^{3n}$. Demuestre que $x_{n}+2^{3}x_{n-1} = 0$