Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación

Prof. Gabriel Rabanales R.

Guía de ejercicios
Espacios vectoriales 1

1. En $V = \mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones:

(i) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (ii) $l(x, y) = (lx, y), \quad l \in \mathbb{R}$

¿Es V con estas operaciones un espacio vectorial real?

Solución: Sean $a, b \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad u = (x, y) \in V$. Entonces:

P.d.q: $(a + b)u = au + bu$ (además de las otras propiedades de espacio vectorial)

$(1)\ (a + b)u = (a + b)(x, y) = ((a + b)x, y)$

$(2)\ au + bu = a(x, y) + b(x, y) = (ax, y) + (bx, y) = ((a + b)x, 2y)$

Luego: $(a + b)u \neq au + bu$ y V no es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

2. En $V = \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:

$(i)\ x + y = x \cdot y \qquad (ii)\ l \cdot x = x^l, \quad l \in \mathbb{R}$

¿Es V con estas operaciones un espacio vectorial real?

Solución: No. Contraejemplo: $\dfrac{1}{2} \cdot (-3) = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$

3. Determine el subespacio generado por el conjunto de vectores $S = \{1, x - 2, x^2 - 2x + 1\}$ como subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$

Solución: Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \quad \wedge \quad a, b, g \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
p(x) \in \langle S \rangle &\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 = a \cdot 1 + b(x - 2) + g(x^2 - 2x + 1) \\
&\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 = a + bx - 2b + gx^2 - 2gx + g \\
&\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a - 2b + g) + (b - 2g)x + (g)x^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + g = a_0 \\ b - 2g = a_1 \\ g = a_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow g = a_2 \wedge b = a_1 + 2a_2 \wedge a = a_0 + 2(a_1 + 2a_2) - a_2 \\
&\Leftrightarrow g = a_2 \wedge b = a_1 + 2a_2 \wedge a = a_0 + 2a_1 + 3a_2
\end{aligned}$$

Luego $p(x) \in \langle S \rangle \quad \forall p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \langle \{1, x - 2, x^2 - 2x + 1\} \rangle = \mathbb{R}_2[x]$

El subespacio generado por S es $\mathbb{R}_2[x]$.

4. Sea $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x = y \wedge z = w\} \leq \mathbb{R}^4$.

Encuentre una base para W y calcule su dimensión.

Solución:

$$\begin{aligned} u \in W &\Leftrightarrow u = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \wedge x = y \wedge z = w \\ &\Leftrightarrow u = (x,x,z,z) \wedge (x,z) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow u = x(1,1,0,0) + z(0,0,1,1) \wedge (x,z) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow u \in \left\langle \{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\} \right\rangle \end{aligned}$$

Luego, $W = \left\langle \{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4$

P.d.q: $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ es linealmente independiente.

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} a(1,1,0,0) + b(0,0,1,1) = (0,0,0,0) &\Leftrightarrow (a,a,b,b) = (0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \end{aligned}$$

Así $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ es l.i. y es una base de W , y dim (W) = 2

5. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$

a) Demuestre que $\alpha = \{(1,1,2),(2,1,3)\}$ es una base de W.

b) Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = \{(1,1,2),(2,1,3,),v\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a) $1+1-2 = 0 \Rightarrow (1,1,2) \in W \quad \wedge \quad 2+1-3 \Rightarrow (2,1,3) \in W$

(i) P.d.q. $\alpha = \{(1,1,2),(2,1,3)\}$ genera W.

$$\begin{aligned} u = (x,y,z) \in W &\Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{R} : (x,y,z) = a(1,1,2) + b(2,1,3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ a + b = y \\ 2a + 3b = z \end{cases} \\ &\Rightarrow x + y - z = (a+2b) + (a+b) - (2a+3b) = 0 \end{aligned}$$

Luego $\{(1,1,2),(2,1,3)\}$ genera W.

(ii) P.d.q. $\alpha = \{(1,1,2),(2,1,3)\}$ es linealmente independiente. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a(1,1,2) + b(2,1,3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Rightarrow \alpha \text{ es l.i.}$$

Luego, $\alpha = \{(1,1,2),(2,1,3)\}$ es base de W.

b) Tomamos $v=(0,0,1)\Rightarrow b=\{(1,1,2),(2,1,3),(0,0,1)\}\subset \mathbb{R}^3$

P.d.q. $b=\{(1,1,2),(2,1,3),(0,0,1)\}$ es linealmente independiente. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ tales que:

$$a(1,1,2)+b(2,1,3)+c(0,0,1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases} a+2b=0\\ a+b=0\\ 2a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0$$

Luego, b es l.i. y dim $\langle b\rangle$ = 3 $\Rightarrow b$ es base de $\mathbb{R}^3$.

6. Sean $a=\{(1,-1,0),(0,-1,2)\}$ y $b=\{(1,-2,2),(3,-5,4)\}$ dos bases de un subespacio $W\leq\mathbb{R}^3$.

a) Encuentre $[I]_a^b$

b) Encuentre, si es posible, las coordenadas en ambas bases de los vectores (1,0,0) y (4,-7,6).

Solución:

a) Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que:

$$(1,-1,0)=a(1,-2,2)+b(3,-5,4)\Leftrightarrow\begin{cases} a+3b=1\\ -2a-5b=-1\\ 2a+4b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=-2\wedge b=1$$

$$(0,-1,2)=a(1,-2,2)+b(3,-5,4)\Leftrightarrow\begin{cases} a+3b=0\\ -2a-5b=-1\\ 2a+4b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=3\wedge b=-1$$

Luego, $[I]_a^b=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

b) Coordenadas:

En b :

$$(1,0,0)=a(1,-2,2)+b(3,-5,4)\Leftrightarrow\begin{cases} a+3b=1\\ -2a-5b=0\Rightarrow \text{no existe solución}\Rightarrow(1,0,0)\notin W\\ 2a+4b=0\end{cases}$$

$$(4,-7,6)=a(1,-2,2)+b(3,-5,4)\Leftrightarrow\begin{cases} a+3b=4\\ -2a-5b=-7\\ 2a+4b=6\end{cases}\Leftrightarrow a=1\wedge b=1$$

Luego, $[(4,-7,6)]_b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Entonces: $[(4,-7,6)]_a=\left([I]_a^b\right)^{-1}[(4,-7,6)]_b=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$