Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación
Prof. Gabriel Rabanales R.

Guía de ejercicios
Espacios vectoriales 3

(1) En $V = \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:

$(i)\ \ x + y = x \cdot y$

$(ii)\ a \cdot x = x^a \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$

¿Es V con estas operaciones un espacio vectorial real?

(2) Demuestre que el conjunto de los polinomios reales de grado “n” más el polinomio nulo no es espacio vectorial real.

(3) Sea V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial. Si W es subespacio de V ($W \leq V$), y U es subespacio de W ($U \leq W$), demuestre que U es subespacio de V ($U \leq V$).

(4) Considere los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$:

e_1 = (1,0,0,0) ; e_2 = (0,1,0,0) ; e_3 = (0,0,1,0) ; e_4 = (0,0,0,1)

Sean $\begin{cases} x = e_1 + 2e_2 + a\,e_3 + e_4 \\ y = e_1 + e_2 + 2e_3 + b\,e_4 \\ z = \qquad\quad e_2 + b\,e_3 \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

(a) Determine a y b para que x, y, z sean linealmente dependientes.

(b) ¿Qué vector es combinación lineal de los otros dos?

(5) Determine el subespacio generado por el siguiente conjunto de vectores:

(a) $\left\{1, x-2, x^2-2x+1\right\}$ como subespacio de $\mathbb{R}_2\left[x\right]$

(b) $u_1 = x+1$, $u_2 = x^2+1$, como subespacio de $\mathbb{R}_2\left[x\right]$

(6) Sea $U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x = y \wedge z = w\right\} \leq \mathbb{R}^4$.

Encuentre una base para U y determine dim (U).

(7) Sea $W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_3\left[x\right] / \, p(x) = p(-x) \right\}$ un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Hallar una base para W y calcular su dimensión.

(8) Dado el conjunto de vectores: $a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

(a) ¿Es a linealmente independiente?

(b) ¿Es a una base para el espacio vectorial $M_{\mathbb{R}}(2)$?

(c) ¿Qué espacio genera a ?

(d) ¿Cuál es la dimensión de $\langle a \rangle$

(9) Sea $V=\left\langle\left\{(1,0,1),(0,1,0),(2,-1,2)\right\}\right\rangle$. Demuestre que la dimensión de V es 2.

(10) Determine las distintas condiciones sobre $a,b\in\mathbb{R}$ de modo que:

$$(-2,b,1)\in\left\langle\left\{(a,0,2),(4,a,-2),(-2a,-2,a)\right\}\right\rangle$$

(11) Sean U, W los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$U=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 / a+b+c=0\right\}$, $W=\left\{(0,0,d)\in\mathbb{R}^3\right\}$

(a) Demuestre que $\mathbb{R}^3=U+W$

(b) ¿Es $\mathbb{R}^3=U\oplus W$?