1	
2	
3	
4	
Nota	

Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Examen de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
20 de Diciembre del 2002

(1) Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, demuestre usando Inducción que la fórmula:

$$\text{F(n):} \qquad A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \left[\frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\right] \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \text{ Es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(2) Sea $\alpha = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\} \subset \mathbb{R}_3[x]$

- Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}_3[x]$
- Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_3[x]$ entonces determine $[p(x)]_\alpha$

(3) Considere $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ y $H \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } H(1,0) = (1,2,3) \text{ y } H(1,1) = (0,0,1)$$

donde $\alpha = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $\beta = \{(1,0), (1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
Demuestre que $H \circ T \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$y decida si es un isomorfismo.

(4) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(A) = A^t$. Demuestre que T es diagonalizable.

BUEN TRABAJO !!!

[1] El problema 1 vale 1.5 puntos; El problema 2 vale 2.0 puntos
El problema 3 vale 2.0 puntos; El problema 4 vale 0.5 puntos
Tiempo 100'