Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

1	
2	
3	
4	
Nota	

Profesor Ricardo Santander Baeza[1]
Examen de Álgebra - Ingeniería Civil
14 de Diciembre del 2004

(1) Considere $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x,y,z) = (ux+y, uy+z, uz)$, para $u \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula.

$$T^n(x,y,z) = (u^n x + nu^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}z, u^n y + nu^{n-1}z, u^n z)$$

Es verdadera, $(\forall n; n \in \mathbb{N})$, donde $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n-veces)

(2) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tal que $[T(x,y,z,w)]_{c(4)} = \begin{pmatrix} c(x+w)+ay+bz \\ ax+c(y+z)+bw \\ bx+c(y+z)+aw \\ c(x+w)+by+az \end{pmatrix}$. Demuestre que

$a = b \Longrightarrow T$ no sobreyectiva.

(3) Si $\alpha = \{x, x^2+3, 2x^2+x\}$ y $\beta = \{x+3, x-2, x^2+1\}$ son dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

(i) Construya, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $A = [T]_{\alpha}^{\beta}$

(ii) Determine $[T(1+x+x^2)]_{\beta}$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita n, $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $L \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ y $U \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$
- U es invertible.
- $L = U \circ T \circ U^{-1}$

Entonces

(i) Demuestre que L inyectiva $\Longrightarrow T$ inyectiva

(ii) Demuestre que L diagonalizable $\Longrightarrow T$ diagonalizable

BUEN TRABAJO !!!

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'