1	
2	
3	
4	
Total	

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Examen 2[1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
3 de Marzo del 2004

(1) Demuestre que la fórmula $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(2.1) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que verifican las propiedades:

(a) $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ y $B \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$
(b) A simétrica y B simétrica. ($A = A^t$ y $B = B^t$)
(c) $AB = BA$

Demuestre que:

(i) $A^{-1}B = BA^{-1}$
(ii) $A^{-1}B$ es simétrica. (es decir $(A^{-1}B)^t = A^{-1}B$)

(2.2) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que verifica las propiedades:

(a) $A^5 = (0)$
(b) $A^s \neq (0)$ para $s = 0, 1, 2, 3, 4$ y $A^0 = I_n$

Demuestre que:

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + A^4 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$$

(3) Considere el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$, donde

(a) $\mathbb{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$
(b) $u + v = (x \cdot z, y \cdot t)$. Para $u = (x, y) \in \mathbb{V}$ y $v = (z, t) \in \mathbb{V}$
(c) $\lambda \cdot u = (x^\lambda, y^\lambda)$. Para $u = (x, y) \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) Determine $0_{\mathbb{V}}$. (El elemento neutro de $\mathbb{V}$ respecto de la adición definida)
(ii) Sea $\alpha = \{(1, 2), (2, 1)\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que α es una base de $\mathbb{V}$
(iii) Determine $[(4, 16)]_\alpha$

(4) Considere $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = ((1 - a)x + y + z, 2x + (2 - a)y + 2z, x + y + (1 - a)z); \quad (a \in \mathbb{R})$$

(i) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \quad (\forall a; a \in \mathbb{R})$
(ii) Determine los conjuntos:

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ no es un isomorfismo}\}$
$S_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo}\}$

BUEN TRABAJO !!!

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 120 minutos