

Guía de Ejercicios para PEP N°1
Coordinador de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Mayo del 2010

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, los profesores de nuestra coordinación les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en primera instancia, en el más breve plazo desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente

- [1] Operar con polinomios
- [2] Demostrar el valor de verdad de proposiciones lógicas, usando tablas de verdad o bien propiedades
- [3] Demostrar la validez de fórmulas proposicionales usando el método de Inducción matemática
- [4] Determinar rápida y eficientemente los elementos de sucesiones numéricas que poseen las propiedades de progresiones aritméticas y geométricas
- [5] Determinar rápida y eficientemente cualquier término de un desarrollo binomial

Y en segunda instancia, la competencia más importante para nosotros es que consigan expresar de manera clara precisa y estructurada sus conclusiones, sin duda esta es la parte más compleja y difícil de realizar, pero tengan certeza que esta propiedad no viene en el ADN, y por tanto quien ya la obtuvo lo hizo sólo persistiendo en el trabajo, y una buena idea será imitarlo.

Algunas sugerencias

- [1] Lea cuidadosamente el problema
- [2] Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.
- [3] Gestione de forma eficiente la información

1. Ejercicios Propuestos

1.1. De las Bases Numéricas.

- [1] Expresar en base 2: (a) $x = 45$ (b) $x = 318$ (c) $x = 2402$
- [2] Expresar en el sistema decimal: (a) $x = 24512$ (base 7) (b) $x = 1231231$ (base 4)
- [3] Sin pasar por el sistema decimal, realice las siguientes conversiones:
Escriba en base 8: (a) $x = 321322$ (base 4) (b) $x = 2122$ (base 4) (c) $x = 12321$ (base 4)
Escriba en base 3: (a) $x = 666666$ (base 9)

[4] Demuestre que en cualquiera sea la base B , el número 101010101 no es primo

[5] Demuestre que $121_{(m)} = ((m+1)^2)_{(10)}$, entiéndase 10 como base decimal.

1.2. De los polinomios.

[1] ¿ $i(a+b)^m - a^m - b^m$ es divisible por $(a+b)$, si m es impar?. Justifique su respuesta.

[2] Demuestre que el polinomio $(a-3)^{2n} + (a-2)^n - 1$ es divisible por $(a-3)(a-2)$

[3] Determine m y n de modo que el polinomio $q(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4$ sea un cuadrado perfecto

[4] Factorización directa de trinomios. Descomponga en factores

(a) $p(x) = x^5 - x$

(b) $p(x) = 2x^3 + 6x^2 + 10x$

(c) $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - 10x$

(d) $p(x) = x^4 - 5x^2 - 36$

(e) $p(x, y) = 3xy + 15x - 2y - 10$

(f) $p(x) = 2xy + 6x + y + 3$

[5] Factorización de trinomios usando sustitución. Ideas para resolver

Consideremos el trinomio; $p(x) = (x-2)^2 + 3(x-2) - 10$ entonces podemos desarrollar el siguiente procedimiento o algoritmo:

- Sea $u = x - 2$

- Sustituyendo en $p(x)$ tenemos que

$$p(x) = (x-2)^2 + 3(x-2) - 10 \iff q(u) = u^2 + 3u - 10$$

- Resolvemos la ecuación de segundo grado para la variable u .

$$\begin{aligned} q(u) = 0 &\iff u = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \\ &\iff u = \frac{-3 \pm 7}{2} \\ &\iff u = \begin{cases} u = 2 \\ \vee \\ u = -5 \end{cases} \\ &\iff q(2) = 0 \vee q(-5) = 0 \\ &\iff q(u) = (u-2)(u+5) \end{aligned}$$

- Volvemos a la variable original y obtenemos:

$$\begin{aligned} p(x) &= ((x-2)-2)((x-2)+5) \\ &= (x-4)(x+3) \end{aligned}$$

Usando el procedimiento anterior factorice los siguientes:

(a) $p(x) = (x - 3)^2 + 10(x - 3) + 24$

(b) $p(x) = (x + 1)^2 - 8(x + 1) + 15$

(c) $p(x) = (2x + 1)^2 + 3(2x + 1) - 28$

(d) $p(x) = (3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 36$

(e) $p(x) = 6(x - 4)^2 + 7(x - 4) - 3$

[6] Planteamiento y resolución de ecuaciones polinomiales

A modo de ejemplo, consideremos el problema:

Una sala de clases posee 78 sillas universitarias. Si el número de sillas por fila es uno más que el doble del número de filas entonces determine el número de filas y de sillas por fila.

- Planteamiento del problema

Si x es la variable que representa el número de filas entonces $x(2x + 1)$ representa el número de sillas por fila, así que

$$x(2x + 1) = 78 \text{ representa el número total de sillas}$$

- Resolvemos la ecuación $2x^2 + x - 78 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 78 = 0 &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{4} \\ &\iff x = \frac{-1 \pm 25}{4} \\ &\iff x = 6 \vee x = -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

- Decidimos la factibilidad de los resultados:

Como el número de filas es un natural, así que desechamos $x = -\frac{13}{2}$ y $x = 6$ es el resultado posible y hay 13 sillas por fila.

Resuelva los siguientes problemas:

- Determine dos enteros consecutivos cuyo producto sea 72
- Determine dos enteros cuyo producto sea 105 y uno de ellos debe ser uno más que el doble del otro.
- El perímetro de un rectángulo mide 32 cm y su área es de 60 cm². Determine las dimensiones del rectángulo.
- Si el largo de un rectángulo excede en 2 cm al triple de su ancho y su área es 56 cm². Determine las dimensiones del rectángulo.
- La suma de las áreas de dos círculos es 65π centímetros cuadrados. Si el radio del círculo mayor mide un centímetro menos que el doble del radio del círculo menor entonces determine el radio de cada círculo.

[7] División de polinomios. Realice las divisiones que se indican:

(a) $(x^2 - 7x - 78) \div (x + 6)$

(b) $(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \div (x^2 + x - 1)$

(c) $(5a^3 + 7a^2 - 2a - 9) \div (a^2 + 3a - 4)$

(d) $(2n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 3n - 4) \div (n^2 + 1)$

(e) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

(f) $(x^5 - 1) \div (x - 1)$

[8] Ecuaciones con radicales. Resuelva las ecuaciones

(a) $\sqrt{x+2} = 7 - \sqrt{x+9}$

(b) $\sqrt{x^2 + 13x + 37} = 1$

(c) $\sqrt[3]{x+1} = 4$

(d) $\sqrt[3]{3x-1} = -4$

(e) $\sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{2-5x}$

1.3. De la Lógica.

[1] Usando una tabla de verdad muestre que la proposición es una equivalencia

$$(p \implies q) \iff [(p \wedge \sim q) \implies (r \wedge \sim r)]$$

[2] Usando una tabla de verdad muestre que la siguiente proposición es una equivalencia

$$(p \implies [q \vee r]) \iff (\sim [q \vee r] \implies \sim p)$$

[3] Demuestre que la proposición siguiente es una tautología

$$[((\sim p \vee q) \implies r) \wedge (r \implies (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \implies \sim t)] \implies p$$

[4] Muestre usando propiedades que la siguiente proposición es una inferencia lógica

$$\sim (p \implies q) \implies (\sim p \implies \sim q)$$

[5] Si p , q , r y t son proposiciones que satisfacen:○ $(p \wedge q) \implies \sim r$ es una proposición falsa○ $q \iff t$ es una proposición falsa

entonces determine el valor de verdad de la proposición:

$$\{[t \wedge (p \vee \sim r)] \implies q\} \iff \{(\sim p \vee q) \wedge r\}$$

- [6] Muestre justificando paso a paso, (usando propiedades, no tablas de verdad), que la siguiente proposición es una inferencia lógica:

$$\sim [\{(\sim q \implies \sim p) \wedge (r \implies s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \implies [(p \wedge r)]$$

- [7] Si para las proposiciones lógicas p y q , se define el conectivo lógico $*$ como sigue:

$p * q$ es Falsa si y sólo si p y q son verdaderas, caso contrario $p * q$ es verdadera

Demuestre usando propiedades, que la siguiente proposición es una tautología

$$[(p \implies q) \vee q] \iff [(p \wedge \sim q) * \sim q]$$

- [8] Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si definimos el nuevo conectivo lógico:

$$p \# q \equiv [(q \wedge p) \implies \sim p] \wedge \sim q$$

Entonces demuestre que

$$\{q \wedge [p \implies (p \# q)]\} \vee \sim p \equiv \sim p$$

- [9] Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si definimos los dos nuevos conectivos lógicos:

$$(p * q \equiv \sim p \implies \sim q) \quad \wedge \quad (p \# q \equiv \sim p \wedge q)$$

Entonces demuestre que

$$(\sim p * q) \# (\sim q \# p) \equiv p \wedge q$$

- [10] Demuestre usando propiedades que

$$\{[p \implies (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \implies r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \equiv p \wedge q$$

- [11] Se define el conectivo lógico $\#$ y se ha hecho así: $q \# p = [p \implies (\sim q \wedge \sim p)] \vee q \vee p$, entonces demuestre que

$$(\sim p \implies q) \# [(p \wedge \sim q) \# \sim q] \equiv T$$

Es decir T es una Tautología

- [12] Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s si se sabe que la siguiente proposición es verdadera.

$$[s \implies ((\sim r \implies r) \vee (r \implies \sim r))] \implies [\sim (p \implies q) \wedge s \wedge \sim r]$$

- [13] Demuestre usando propiedades que

$$\{[p \implies (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \implies r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \equiv p \wedge q$$

- [14] Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones proposicionales. Muestre que si

$$(\exists!x)(p(x)) \wedge (\exists!x)(q(x)).$$

entonces la siguiente proposición es verdadera

$$(\exists!x)(p(x) \wedge q(x)) \implies (\exists!x)(p(x) \wedge q(x)).$$

[15] Para A y B conjuntos: Determine la veracidad o falsedad de las proposiciones

- (a) $A \subset (A \cup B)$
- (b) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$
- (c) $(A \cap B)^c \subset B^c$
- (d) $(A \cup B)^c \subset (A \cap B)^c$
- (e) $B \subset (A \cap B)$
- (f) $(A \cup B)^c \subset A^c$
- (g) $(A \cap B) \cup B = B$

[16] Para A y B conjuntos: Simplifique las proposiciones

- (a) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- (b) $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B)$
- (c) $A \cup B \cup A$
- (d) $(A \cup \emptyset) \cup A^c$
- (e) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A \cup B)$

[17] Para A y B conjuntos: Demuestre que

- (a) $A \cup (A \cap B) = A$
- (b) $A \cap [B - (A \cap B)] = \emptyset$
- (c) $[(A \cap B^c)^c - (A \cup B^c)] \cup (A \cap B) = B$

1.4. De la Inducción Matemática.

Demuestre usando Inducción Matemática que las siguientes fórmulas son verdaderas ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

$$[1] F(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$[2] F(n) : \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$[3] F(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + i} = \frac{n}{n+1}$$

$$[4] F(n) : \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

$$[5] F(n) : \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$[6] F(n) : \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

- [7] $F(n) : \sum_{i=1}^n i 2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$
- [8] $F(n) : \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
- [9] $F(n) : (0 \leq r \leq n) \implies \binom{n}{r} \in \mathbb{N}$
- [10] $F(n) : 2^{n-1} \leq n!$
- [11] $F(n) : 3n \leq 3^n$
- [12] $F(n) : 4n^3 + 5n$ es divisible por 3
- [13] $F(n) : n^3 - n$ es divisible por 6
- [14] $F(n) : 5n^3 + 7n$ es divisible por 6
- [15] $F(n) : 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9
- [16] $F(n) : 5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13
- [17] $F(n) : n \in \mathbb{N}$ impar $\implies 7^n + 1$ es divisible por 8
- [18] $F(n) : 7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64
- [19] $\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$. Donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- [20] $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1.5. De las Progresiones.

- [1] Si el conjunto $A = \{ \frac{3}{2}, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2n} \}$ es una Progresión Aritmética que satisface las siguientes condiciones:
- $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n-1} = 24$
 - $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{2n} = 30$
 - $a_{2n} = a_1 + \frac{21}{2}$
- entonces determine, si es posible, el número de términos de la progresión aritmética.
- [2] Si en una progresión geométrica $u_1 = 4$, $u_n = \frac{243}{8}$, $S_n = \frac{665}{8}$ entonces determine n y su razón r
- [3] La suma de tres números en progresión aritmética es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. Determine tales números
- [4] Si en una progresión aritmética el quinto término es 15 y el décimo término es 30 entonces determine la progresión
- [5] Si la suma de tres números en progresión geométrica es 26 y su producto es 216 entonces determine tales números.
- [6] La suma de tres números en progresión aritmética es 30. Si al primero de ellos se le agrega 1, al segundo 5 y al tercero 29 se obtiene una progresión geométrica entonces determine ambas progresiones

- [7] Determine 5 números reales en progresión geométrica, tales que la suma de los dos primeros es 24, y la razón es la cuarta parte del primer número.
- [8] Si en una progresión aritmética A , se verifica que: El producto del segundo con el quinto término es 364, y además la diferencia de estos mismos términos es 15 entonces determine, si es posible la progresión A .
- [9] Dada la progresión $T = \left\{ \frac{a+b}{2}, a, \frac{3a-b}{2}, \dots \right\}$.
- (a) Calcule S_{21} . La suma de los primeros 21 términos.
- (b) Expresé S_n usando el operador sumatoria.
- [10] Sea $S = \{b_1, b_2, \dots\}$ una sucesión de números reales, tales que:
- (a) $b_m = n; b_n = m$ y $n \neq m$
- (b) Si además construimos una progresión aritmética $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ tal que $a_i = \frac{1}{b_i}$ ($\forall i; i \in \mathbb{N}$) entonces demuestre que la diferencia de la progresión es $d = \frac{1}{mn}$
- [11] La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si se multiplican los números ubicados en los extremos por 4 y el número ubicado en el centro 5, se obtiene una progresión aritmética. Determine ambas progresiones.
- [12] Si se tienen tres términos en progresión geométrica, y se resta 8 del segundo término se obtiene una progresión aritmética, y si en "esta" se resta 64 del tercer término resulta nuevamente una progresión geométrica. Determine, si es posible, todas las progresiones involucradas en el problema.
- [13] Considere las progresiones
- ◊ $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ progresión geométrica
 - ◊ $A = \{3, a_2, a_3, \dots\}$ progresión aritmética
- tal que
- $g_3 = 12$ y $g_7 = 192$
 - $\sum_{i=1}^{11} g_i = \sum_{i=1}^{50} a_i$
- Determine la diferencia de la progresión A
- [14] Si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$ es una progresión aritmética entonces demuestre que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right\}$ es también una progresión aritmética
- [15] Si $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ es una progresión aritmética entonces demuestre que $\left\{ \frac{1}{a_{(i-1)}a_i} \right\}$ es también una progresión aritmética
- [16] Si $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es una progresión aritmética tal que $\sum_{i=1}^n x_i = a$ y $\sum_{i=1}^n x_i^2 = b^2$, entonces determine la progresión A
- [17] Si $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es una progresión geométrica tal que $a_{m+n} = A \neq 0$ y $a_{m-n} = B \neq 0$ entonces determine a_m y a_n .
- [18] Obtenga el valor de la siguiente suma $1 + 11 + 111 + \dots + 111 \dots 1$, donde el último número tiene n unos.

[19] Si $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^+ - \{0\}$ es una progresión aritmética entonces demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

[20] Resuelva la ecuación $9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ si sus raíces están en progresión aritmética

[21] Resuelva la ecuación $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ si sus raíces están en progresión geométrica

1.6. Del Teorema del Binomio.

- [1] Determine el séptimo término en el desarrollo binomial $(2x - y)^{12}$
- [2] Determine el noveno término en el desarrollo binomial $\left(2 + \frac{x}{4}\right)^{15}$
- [3] Determine el decimocuarto término del desarrollo binomial $\left(4x^2y - \frac{1}{2xy^2}\right)^{20}$
- [4] Determine el término que contiene a x^2 en el desarrollo binomial $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2}\right)^{27}$
- [5] Determine el término que contiene $\frac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo binomial $\left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2x^2}\right)^8$
- [6] Determine el término que contiene a x^r en el desarrollo binomial $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$
- [7] Si uno de los términos en el desarrollo binomial $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{60}$ es de la forma $a \cdot x^{-54}$. Determine el valor de a
- [8] Determine el término independiente de x (si existe) en el desarrollo binomial $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{30}$
- [9] Determine el valor de a en el desarrollo binomial $\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{x}\right)^{20}$, de tal forma que el término independiente de x sea igual al coeficiente de x^2
- [10] En el desarrollo binomial $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ el coeficiente binomial del 3^{er} término es mayor que el coeficiente binomial del 2^{do} término en 44 unidades. Determine, si existe, el término independiente de x .
- [11] Muestre que el coeficiente del término central del desarrollo binomial $(1+x)^{2n}$, es igual a la suma de los coeficientes de los dos términos centrales del desarrollo binomial $(1+x)^{2n-1}$
- [12] Dados los desarrollos binomiales $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, y $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$. Determine el conjunto
- $$T = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Los terceros términos de los binomios sean iguales}\}$$
- [13] Si en el desarrollo binomial $(1+x)^{43}$, los coeficientes de la posición $(2m+1)$ y $(m+2)$ son iguales. Determine, si es posible, el valor de m
- [14] Determine el coeficiente de x^n en el desarrollo binomial $(1-x+x^2)(1+x)^{2n+1}$
- [15] En el desarrollo binomial $\left(\frac{x}{a} - y^2\right)^{15}$, el término que contiene a y^{22} presenta el coeficiente numérico $-\frac{455}{27}$. Determine el valor de a
- [16] Demuestre que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$

[17] Considere los reales positivos p y q tales que, $p + q = 1$. Demuestre que

$$r_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n) \implies \sum_{k=0}^n (k \cdot r_k) = n \cdot p.$$

[18] Determine b para que el coeficiente del término en x^4 sea ocho veces el coeficiente del término en x^3 en el desarrollo de $(2x + b)^5$

[19] En el desarrollo de $\left(ax^{\frac{-1}{2}} + xa^{\frac{-1}{2}}\right)^n$ se tiene que: $\frac{\text{coeficiente de } T_3}{\text{coeficiente de } T_2} = \frac{11}{2}$, Calcule n

[20] En el desarrollo de $(x^2 + x^{-1})^n$ el coeficiente de T_4 y T_{13} son iguales. Determine el término independiente de x

[21] En el desarrollo de $\left(z^{\frac{-3}{2}} - z^{\frac{1}{3}}\right)^n$ la razón entre el coeficiente binomial de T_3 y de T_5 es $\frac{2}{7}$. Determine el término que tiene a $z^{\frac{-5}{2}}$

BUEN TRABAJO !!!