Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°1
Coordinador de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Mayo del 2007

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Autores

Luis Arancibia, Ricardo Santander.

2. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente

(1) Operar con polinomios

(2) Demostrar el valor de verdad de proposiciones lógicas, usando tablas de verdad o bien propiedades

(3) Demostrar la validez de fórmulas proposicionales usando el método de Inducción matemática

(4) Determinar rápida y eficientemente los elementos de sucesiones numéricas que poseen las propiedades de progresiones aritméticas y geométricas

(5) Determinar rápida y eficientemente cualquier término de un desarrollo binomial

(6) Determinar los elementos básicos de una relación, y en particular de las relaciones de equivalencia.

3. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.

(3) Gestione de forma eficiente la información

4. Ejercicios Propuestos

(1) La fracción $\dfrac{1}{3}$ en nuestro sistema decimal se escribe $0,33333.... = 0,\overline{3}$, y la misma en el sistema Binario se escribe $0,01010101.... = 0,\overline{01}$, escriba usted, en el sistema Binario la fracción $\dfrac{5}{7}$

(2) Determine la base del sistema de numeración en el cual el número 1331 se anota 1000.

(3) Un número escrito en el sistema binario tiene **ocho** cifras, ¿cuántas puede tener el es sistema **docenal (base 12)**?

(4) Si p y q son proposiciones lógicas. Demuestre que

$$[\exists(x) : p(x) \wedge \exists(x) : q(x)] \nRightarrow [\exists(x) : (p \wedge q)(x)]$$

(5) Si p y q son proposiciones lógicas, y A es un conjunto entonces niegue la proposición

$$(\forall(x), x \in \mathbf{A}) : [p(x) \wedge \sim q(x)]$$

(6) Si A_n y B_n $(\forall n; n \in \mathbb{N})$, son conjuntos. Demuestre que

$$\left(B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad (\forall n \in \mathbf{N}\right) \Longrightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

(7) Determine si existe o no un polinomio $p(x)$ de grado 3 tal que $p(1) = 0$, y $p(-i) = -9$ para $i = 1, 2, 3$. Si la respuesta es afirmativa, determine $p(x)$

(8) Determine el conjunto

$$S \quad = \quad \left\{p(x)\mathbb{R}[x] \mid \sqrt{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = p(x)\right\}$$

(9) Desarrolle si es posible,el polinomio $p(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 6x + 2$ en potencias de $x - 2$

(10) Determine una fórmula para calcular: $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2 - 3k - 2}$

(11) Demuestre usando Inducción matemática que $3^{2n+1} + 2^{n+2} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$, es múltiplo de 7

(12) ¿Cuántos términos hay que considerar en la progresión aritmética $5,\ 9,\ 13,\ 17, ...$ para que su suma sea 10877?

(13) Sea $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ una progresión aritmética. Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} a_i = S_1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2} a_i = S_2$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_3} a_i = S_3$. Demuestre que:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$$

(14) Determine, si es posible, una progresión geométrica tal que verifica las siguientes propiedades:

- La diferencia entre el tercer y el primer términos es igual a 9 y
- la diferencia entre el quinto y el tercero es 36.

(15) Determine, si es posible, cinco números en progresión geométrica tal que su suma: menos el primero es 19,5 y menos el último es 13.

(16) Tres números forman una progresión geométrica. Si al tercero de ellos le restamos 64, se transforma en progresión aritmética. Y realizado esto, le restamos 8 al segundo, entonces volvemos a tener una progresión geométrica. Determine los tres números iniciales.

(17) Resolver la ecuación $2 \cdot \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}$ donde n es un número natural

(18) en el desarrollo binomial $(1 + x^2 - x^3)^9$. Determine el coeficiente del término que contiene a x^8

(19) En el desarrollo binomial $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5$ determine el conjunto

$$E = \{k \in \mathbb{Z} \mid t_k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{donde } t_k \text{ es el término de orden } k$$

(20) Sea $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ y $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Defina en $P(A)$ la siguiente relación

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow X - \{0,\ 1,\ 2,\ 4\} = Y - \{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$$

.

- Demuestre que R es relación de equivalencia.
- Determine las clases de $\overline{\emptyset}$ y $\overline{\{5\}}$

(21) Sea $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Defina en $P(A)$ la siguiente relación

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow X \subset Y$$

.

Determine las propiedades que cumple R y confeccione un diagrama que la represente

(22) Si R y S son dos relaciones entonces demuestre que

- $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$
- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

(23) Sea R una relación. Demuestre que

$$R \text{ es transitiva } \Leftrightarrow R \circ R \subset R$$

(24) Diremos que una relación R es circular si verifica la siguiente propiedad. $aRb \wedge bRc \Longrightarrow cRa$. demuestre que

$$R \text{ refleja y circular } \Longrightarrow R \text{ es relación de equivalencia}$$

(25) Sean $R \subset A^2$ y $S \subset A^2$ dos relaciones de equivalencia ¿Es $R \circ S$? una relación de equivalencia

(26) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Define en $\mathbb{R}^3$ la relación

$$(x_1, y_1, z_1)\ R\ (x_2, y_2, z_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \in \mathbb{W}$$

- Demuestre que R es una relación de equivalencia
- Demuestre que $\mathbb{W} = \overline{(0, 0, 0)}$
- Determine $\overline{\mathbb{R}^3} = \left\{\overline{(x, y, z)} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$

(27) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Define en $\mathbb{R}^3$ la relación

$$(x_1, y_1, z_1)\ R\ (x_2, y_2, z_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \in \mathbb{W}$$

- Demuestre que R es una relación de equivalencia
- Demuestre que $\mathbb{W} = \overline{(0, 0, 0)}$
- Determine $\overline{\mathbb{R}^3} = \left\{\overline{(x, y, z)} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$

(28) Sea $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a_0 - a_1 = 0\}$. Define en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación

$$p(x)\ R\ q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (p(x) - q(x)) \in \mathbb{W}$$

- Demuestre que R es una relación de equivalencia
- Demuestre que $\mathbb{W} = \overline{0 + 0x + 0x^2}$
- Determine $\overline{\mathbb{R}_2[x]} = \left\{\overline{p(x)} \mid p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\right\}$

BUEN TRABAJO !!!