Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°1
Coordinación de Álgebra
Mayo del 2006

La matemática viene impresa en el cerebro pero,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente:

(1) Operar con polinomios

(2) Utilizar tablas de verdad y propiedades para verificar equivalencias entre proposiciones lógicas

(3) Plantear problemas utilizando cuantificadores

(4) Operar con sumatorias

(5) Resolver problemas usando el método de inducción matemática

(6) Determinar rápida y eficientemente los elementos de una progresión

(7) Plantear y resolver problemas usando progresiones

(8) Emplear el concepto de búsqueda instantánea en desarrollos binomiales.

Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta

(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más

(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

Ejercicios Propuestos

Bases numéricas

(1) Exprese en base 2, los siguientes números:

- $x = 45$
- $x = 318$
- $x = 2402$

(2) Exprese en el sistema decimal los números:

- $x = 24512$ (base 7)
- $x = 1231231$ (base 4)

(3) Sin pasar por el sistema decimal, realice las siguientes conversiones:

- Escriba en base 8: $x = 321322$ (base 4), $x = 2122$ (base 4); $x = 12321$ (base 4)
- Escriba en base 3: $x = 666666$ (base 9)

Lógica

(1) Si p y q son dos proposiciones lógicas y definimos el conectivo $\#$, como sigue:

$$p\#q \quad \equiv \quad [(q \wedge p) \Longrightarrow \sim p] \wedge \sim q$$

Demuestre que

$$\{q \wedge [p \Longrightarrow (p\#q)]\} \vee \sim p \equiv \sim p$$

(2) Si p y q son dos proposiciones lógicas y definimos los conectivos $\#$ y $*$, como sigue:

$$\begin{aligned} p * q &= \sim p \Longrightarrow \sim q \\ p\#q &= \sim p \wedge q \end{aligned}$$

Demuestre que

$$(\sim p * q)\#(\sim q\#p) \equiv p \wedge q$$

(3) Demuestre usando propiedades que

$$\{[p \Longrightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \Longrightarrow r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \equiv p \wedge q$$

Sumatorias e Inducción

(1) Calcule usando propiedades de las sumatorias:
- $12^2 + 14^2 + 16^2 + \cdots + 320^2$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n}(2i - 3ni + 4)$

(2) Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$

(3) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+i)} = \frac{n}{n+1}$. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(4) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ n \in \mathbb{N}$ impar $\Longrightarrow 7^n + 1$ es divisible por 8. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(5) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ 5n^3 + 7n$ es divisible por 6. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(6) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ n \in \mathbb{N}$ impar $\Longrightarrow 7^n + 1$ es divisible por 8. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(7) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ (n+1)(n+2)\cdots(n+n) = 2^n\dfrac{(2n-1)!}{(2(n-1))!}$. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(8) Demuestre usando Inducción matemática que: Si $U_{n+1} = (1+x)U_n - nx$, $(\forall n; n \in \mathbb{N})$, y $U_1 = 0$ entonces

$$U_n \quad = \quad \frac{1}{x}[1 + nx - (1+x)^n] \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(9) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ 2^{n-1} \leq n!$. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(10) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(11) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n):\ (0 \leq r \leq n) \Longrightarrow \dbinom{n}{r} \in \mathbb{N}$. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Progresiones

(1) Determine 5 números reales en progresión geométrica, tales que la suma de los dos primeros es 24, y la razón es la cuarta parte del primer número.

(2) Si en una progresión aritmética A, se verifica que: El producto del segundo con el quinto término es 364, y además la diferencia de estos mismos términos es 15 entonces determine, si es posible la progresión A.

(3) Dada la progresión $T = \left\{\dfrac{a+b}{2}, a, \dfrac{3a-b}{2}, \dots\right\}$.

(a) Calcule S_{21}. La suma de los primeros 21 términos.

(b) Exprese S_n usando el operador sumatoria.

(4) Sea $S = \{b_1, b_2, \dots\}$ una sucesión de numeros reales, tales que:

(a) $b_m = n$; $b_n = m$ y $n \neq m$

(b) Si además construimos una progresión aritmética $A = \{a_1, a_2, \dots, \}$ tal que $a_i = \dfrac{1}{b_i} \quad (\forall i; i \in \mathbb{N})$

entonces demuestre que la diferencia de la progresión es $d = \dfrac{1}{mn}$

(5) Dada la progresión $A = \{a, a+d, a+2d, \dots, \}$ y S la suma de sus $n+1$ primeros términos. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(a+kd) = \frac{2^n S}{n+1}$$

(6) La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si se multiplican los números ubicados en los extremos por 4 y el número ubicado en el centro 5, se obtiene una progresión aritmética. Determine ambas progresiones.

(7) Si se tienen tres términos en progresión geométrica, y se resta 8 del segundo término se obtiene una progresión aritmética, y si en ”esta” se resta 64 del tercer término resulta nuevamente una progresión geométrica. Determine, si es posible, todas las progresiones involucradas en el problema.

Teorema del binomio

(1) Determine el término que contiene a x^2 en el desarrollo binomial $\left(\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)^{27}$

(2) Determine el término que contiene a x^r en el desarrollo binomial $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{n}$

(3) En el desarrollo binomial $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{50}$. Determine, si existe, el término independiente de x.

(4) En el desarrollo binomial $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ " el coeficiente binomial" del $3^{\underline{\text{er}}}$ término es mayor que el coeficiente binomial del $2^{\underline{\text{do}}}$ término en 44 unidades. Determine, si existe, el término independiente de x.

(5) Muestre que el coeficiente del término central del desarrollo binomial $(1+x)^{2n}$, es igual a la suma de los coeficientes de los dos términos centrales del desarrollo binomial $(1+x)^{2n-1}$

(6) Dados los desarrollos binomiales $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$, y $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$. Determine el conjunto

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ Los terceros términos de los binomios sean iguales}\}$$

(7) Si en el desarrollo binomial $(1+x)^{43}$, los coeficientes de la posición $(2m+1)$ y $(m+2)$ son iguales. Determine, si es posible, el valor de m

(8) Determine el coeficiente de x^n en el desarrollo binomial $(1-x+x^2)(1+x)^{2n+1}$

(9) En el desarrollo binomial $\left(\dfrac{x}{a}-y^2\right)^{15}$, el término que contiene a y^{22} presenta el coeficiente numérico $-\dfrac{455}{27}$. Determine el valor de a

(10) Determine el valor de a en el desarrollo binomial $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{x}\right)^{20}$, de tal forma que el término independiente de x sea igual al coeficiente de x^2

(11) Los términos $2^{\underline{\text{do}}}$, $3^{\underline{\text{ero}}}$ y $4^{\underline{\text{to}}}$, son respectivamente 240, 720 y 1080. determine, si es posible x, y y n.

(12) Considere los reales positivos p y q tales que, $p+q=1$. Demuestre que

$$r_k = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (0 \le k \le n) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}(k\cdot r_k) = n\cdot p.$$

BUEN TRABAJO !!!

Profesor Ricardo Santander Baeza
Coordinador