Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería civil Álgebra
Año 2007

Guía Adicional
Preparando la 2^{da} PEP

Profesores: Ricardo Santander Baeza
Luis Arancibia Morales
Junio de 2007

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente

(1) Analizar y clasificar funciones según sus propiedades
(2) Graficar funciones
(3) Resolver problemas que envuelven propiedades trigonométricas
(4) Obtener la ecuación de una recta. Plantear y resolver problemas de paralelismo y perpendicularidad
(5) Reconocer y graficar y las secciones cónicas clásicas
(6) Determinar lugares geométricos en relación a rectas y circunferencias y cónicas

2. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.

(3) Gestione de forma eficiente la información

3. Ejercicios Propuestos

3.1. Funciones.

(1) Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $f(x-5) = x^2 - 1$ para todo número real. Determine, si es posible, $f(x)$ $(\forall x; x \in \mathbb{R})$.
(2) Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $f(2x+1) = 5x-4$ para todo número real. Determine, si es posible, $f(x)$ $(\forall x; x \in \mathbb{R})$.
(3) Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $f\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = x+7$ para todo número real. Determine, si es posible, $f(x)$ $(\forall x; x \in \mathbb{R})$.
(4) Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f((a_0 + a_1x + a_2x^2)) = (a_0 - a_2,\ a_1 + 2a_0,\ 3a_1 - a_2)$
  (a) Demuestre que f es una función.
  (b) ¿f es una biyección?

(5) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = (x+2,\ 2x-3)$.
   (a) ¿f esuna función?,
   (b) Si $f$es una función ¿es inyectiva?, ¿ es sobreyectiva?

(6) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ 1-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

¿f es una función?

(7) Sean A y B conjuntos no vacíos y considere las funciones $f : A \longmapsto B \wedge g : B \longmapsto C$. Demuestre que

   (a) $(g \circ f)$ epiyectiva $\Longrightarrow g$ epiyectiva.
   (b) $(g \circ f)$ inyectiva $\Longrightarrow f$ inyectiva.

(8) Sean $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $b \in \mathbb{R}$, fijos. Define la función $f_{ab} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f_{ab}(x) = ax + b$. Demuestre que f_{ab} es una biyección.

(9) Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longmapsto B$ una función. Si para $X_i \subset A$, $(i = 1,2)$ definimos el conjunto $f(X_i) = \{f(x) \in B \mid x \in X_i\}$, para $(i = 1,2)$ entonces demuestre que

   (a) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$
   (b) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2) \Longleftrightarrow f$ es inyectiva

3.2. Funciones Trigonométricas.

(1) Una función real f se dice que es periódica, de período $t > 0$, si $f(x+t) = f(x)$ y si $f(x+s) = f(x)$ entonces $t \leq s$

   (a) Determine si $f(x) = x - [x]$ es una función periódica, y si lo fuese determine su período.

   (b) ¿ Es $f(x) = x^2 - [x^2]$, una función periódica?. Si lo es determine su período.

   (c) Determine el período de $f(x) = sen(2x)$.

   (d) ¿Cuál es el período de $f(x) = sen\left(\frac{3x}{5}\right)$?

   (e) Determine el período de $f(x) = sen(x) + cos(x)$

(2) Demuestre que

$$\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \Longrightarrow \sqrt{2ctg\alpha + \frac{1}{sen^2\alpha}} = -(1 + ctg\alpha)$$

(3) Demuestre que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Longrightarrow cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 1 + 4sen\frac{\alpha}{2}sen\frac{\beta}{2}sen\frac{\gamma}{2}$$

(4) Demuestre que

   (a) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \left(\dfrac{1 - tg\alpha}{1 - \operatorname{ctg} \alpha}\right)^2 \qquad (*)$

(b) Determine el conjunto $S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ es verdadera}\}$

(5) Demuestre que en cualquier $\Delta\ ABC$ se verifica que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

(6) Clasifique, si es posible, la clase de $\Delta\ ABC$ que verifican $b \operatorname{tg} \gamma = c \operatorname{tg} \beta$

(7) Demuestre que si en un $\Delta\ ABC$ se verifica: $\operatorname{sen}^2 \gamma = \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta$ entonces el $\Delta\ ABC$ es rectángulo

3.3. Otras Funciones.

(1) Una función f será llamada función par, si $f(-x) = f(x), \quad (\forall x; x \in dom(f))$ e impar si $f(-x) = -f(x), \quad (\forall x; x \in dom(f))$.

(a) Demuestre que si f par y g par entonces $f \cdot g$ es par

(b) Demuestre que si f par y g impar entonces $f \cdot g$ impar

(c) Si f y g son ambas función par entonces estudie la paridad de la función $f \circ g$

(2) Una función será llamada una función lineal si:

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Dentro de las siguientes funciones, ¿cuál o cuáles se pueden clasificar como función lineal?

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f((x, y, z)) = (2x - 3y,\ y + 4z)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f((x, y)) = \dfrac{2x - 3y}{5}$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f((x, y, z)) = (2x - 5y + 1, 3y - 2z - 1)$

(d) $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f(x) = (x, 3x, 7x)$

3.4. Secciones Cónicas.

(1) Determine la ecuación de una recta L, que es perpendicular a la recta $L_1 : 2x + 5y + 3 = 0$, y pasa por la intersección de las rectas $L_2 : x - 2y + 1 = 0$ y $L_3 : 2x + y - 1 = 0$

(2) Determine una función cuadrática $y = q(x)$ tal que pasa por los puntos de intersección de las funciones cuadráticas $q_1 = x^2 - 9$ y $q_2 = -1 - x^2$, y además intersecta al eje y en el punto $P = (0, -2)$

(3) Determine el centro y el radio de un círculo (si es posible), que pasa por los puntos $P = (4, 2)$, $Q = (1, 5)$ y $R = (1 + \sqrt{5}, 0)$

(4) Dadas la ecuación de la circunferencia $C:\ x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ y la ecuación de la recta $L:\ by - (b-1)x - b(b+1) = 0$ donde $b \in \mathbb{R}$

(a) Determine centro y radio de la circunferencia

(b) Determine $b \in \mathbb{R}$ tal que L sea tangente a la Circunferencia en el punto $(0, 5)$.

(c) Grafique ambas curvas.

(5) determine la ecuación de la circunferencia de radio 5, cuyo centro es el punto de intersección de las rectas de ecuación $L_1:\ 3x - 2y - 24 = 0$ y $L_2:\ 2x + 7y + 9 = 0$

(6) Determine la longitud de la circunferencia cuya ecuación canónica es $50x^2 + 50y^2 + 60x - 40y - 124 = 0$

(7) Determine la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(8, 0)$ y $C(4, 5)$.

(8) Identifique y determine los elementos de la sección cónica de ecuación general:

(a) $\frac{9}{4}\,x^2 - 9x + y^2 - 6y + 9 = 0$

(b) $3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$

(c) $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$

(d) $4x^2 + 12x + 48y - 159 = 0$

(e) $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$

3.5. Grupos y Homomorfismos de Grupos.

(1) Sea $G = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 1\}$. Define en G la operación binaria:

$$a * b \quad = \quad \frac{a+b}{1+ab}$$

(a) Determine (si existe), el elemento neutro respecto de la operación $*$

(b) Determine (si existe), el elemento inverso para cada elemento de G.

(c) Demuestre que que $*$ es una operación conmutativa.

(2) En $\mathbb{R} - \{1\}$ define la operación binaria $a * b = a + b + ab$.

(a) Determine si $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ es grupo

(b) Determine, si es posible las soluciones de la ecuación $2 * x * 3 = 7$

(3) Sea $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 \cdot x^3 + 5x_2 \cdot x^2 - x_3 \cdot x + 3x_4$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(4) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 2x_{11} + 5x_{12} - x_{21} - x_{22}$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(5) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} = (2x_{11} + 5x_{12}, x_{11} - x_{13})$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(6) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $f\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_{11} - 5x_{12}) & (x_{21} - x_{13}) \\ x_{22} & x_{11} + x_{23} \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(7) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A) = A - A^t$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de Grupos

(b) ¿f es un isomorfismo?. Justifique su respuesta.

(8) Considere las funciones $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = bx^2 + (a + c)x$ y $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $g(a, b, c) = ax^2 + cx - b$.

(a) Demuestre, si es posible, que f es un homomorfismo

(b) Demuestre, si es posible, que g es un isomorfismo

(c) Demuestre que $g^{-1} \circ f$ no es sobreyectiva.

(9) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} + 3a_{21} & a_{12} - a_{21} + a_{22} \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que h es un isomorfismo de grupos

(b) Determine h^{-1}

(10) Sea $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_1 - 3a_2, a_0 + a_2, a_1 - 3a_2)$

(a) ¿Es h un isomorfismo?

(b) Si su respuesta es afirmativa exhiba h^{-1}

(11) Sea $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ un homomorfismo. Demuestre que h no es inyectiva

(12) Sea $h : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ un homomorfismo. Demuestre que h no es sobreyectiva

(13) Sea $h : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ un homomorfismo no nulo. Demuestre que si $h \circ h = 0_{\mathbb{R}^n}$ entonces h no es inyectiva

BUEN TRABAJO !!!