Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°3
Coordinación de álgebra
Ricardo Santander Baeza
Inge Alicera
Octubre del 2010

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente, operar con:

[1] Matrices y Determinantes
[2] Números complejos
[3] Sistemas de ecuaciones lineales
[4] Espacios vectoriales (subespacios)

Algunas sugerencias

[1] Lea cuidadosamente el problema
[2] Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incógnita", o lo que a usted se le consulta
[3] Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más
[4] Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

Matrices y Determinantes

[1] Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si } i = j \\ 2i - j & \text{si } i \neq j \end{cases}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$ tal que $b_{ij} = j - i + 1$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \mid AX = A^t - 2B\}$$

[2] Demuestre usando Inducción matemática que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

[3] Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

[4] Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. demuestre, si es posible, que

$$A = A^t \implies Adj(A) = (Adj(A))^t$$

[5] Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{I} \;\; = \;\; \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)\}$$

(b) Para $u \in \mathbb{I}$, (si $\mathbb{I} \neq \emptyset$), determine A^{-1}

[6] Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} = 3$ entonces calcule $\det \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix}$

[7] Demostrar que: $\begin{vmatrix} x+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & x+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & x+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & x+a^4 \end{vmatrix} = \dfrac{x^3(a(x+a^4)-(x+a))}{a-1}$

Números Complejos

[1] Exprese en forma binomial los siguientes números complejos:

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{5}}\right)$ (2) $\left(\dfrac{(1+i)^3}{4-i}\right)$ (3) $(\sqrt{-7+24i})$ (4) $\left(\sqrt{6+i\sqrt{13}}\right)$

(5) $\left(\dfrac{b+iy}{b-iy}-\dfrac{b-iy}{b+iy}\right)$ (6) $\left(\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}\right)$ (7) $\left(\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{1-2i}\right)$ (8) $\left(\dfrac{69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i}{3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i}\right)$

[2] Determine explícitamente $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ si:

(a) $p(x) = (x-1-i\sqrt{2})(x-2-i\sqrt{3})(x-1+i\sqrt{2})(x-2+i\sqrt{3})$

(b) $p(x) = (x-\sqrt{-4})(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+\sqrt{-4})$

[3] Si $rcis\ \alpha = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(r, \alpha) \mid 1 + rcis\,\alpha = 2cis\,60^\circ\}$$

[4] Simplifique, si es posible, el complejo $z = \left(\dfrac{cis\,(-2\alpha)cis^2(\beta)}{cis\,(\alpha+\beta)} + \dfrac{cis\,(2\alpha)cis^2\,(-\beta)}{cis\,(-(\alpha+\beta))}\right)$

[5] Si α es una raíz cúbica de la unidad, es decir $\alpha^3 = 1$. Demuestre que:

$$(1)(1+\alpha^2)^4 = \alpha \quad \text{y} \;\; (2)(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5) = 9$$

[6] Demuestre que $\left(z = \dfrac{3}{2 + cos\,\beta + i\,sen\,\beta} \Longrightarrow |z|^2 = 4Re(z) - 3 \right)$.

[7] Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y $n \geq 1$. Demuestre que $\left(\dfrac{1}{1+z^n} + \dfrac{1}{1+\overline{z}^{\,n}} \right) \in \mathbb{R}$.

[8] Determine los siguientes subconjuntos del plano complejo, también conocido como Diagrama de Argand:

(a) $\mathbb{S} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3 \}$
(b) $\mathbb{S} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 3 \}$
(c) $\mathbb{S} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| + |z| = 4 \}$
(d) $\mathbb{S} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| - |z| = 1 \}$
(e) $\mathbb{S} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| = 5 \}$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

[1] Reduzca a su forma escalonada por filas de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} (5) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[2] Resuelva los siguientes sistemas lineales, calcule en cada caso el rango de la matriz, el rango de la matriz ampliada y especifique si el sistema tiene una, infinita o no tiene solución.

$$(1) \begin{array}{rcrcrcrcr} 5x & - & 3y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & - & w & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & - & 2w & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 3z & - & w & = & 0 \end{array} \qquad (2) \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 2z & - & w & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & & - & 2w & = & 0 \\ 30x & - & 2y & + & & + & w & = & 0 \\ x & - & y & - & 5z & + & 2w & = & 0 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & - & w & = & 4 \\ x & - & 3y & + & 3z & + & w & = & 9 \\ x & + & 2y & - & z & + & w & = & -5 \\ 3x & + & 3y & - & 2z & + & w & = & -2 \end{array} \qquad (4) \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & z & = & 6 \end{array}$$

$$(5) \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ \frac{1}{2}x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

[3] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2-4)x_3 & = & a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución única}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{No tiene solución}\} \end{array}$$

[4] Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine

$S_1 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*) \;\text{ tiene solución única}\}$
$S_2 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*) \;\text{ tiene infinitas soluciones }\}$
$S_3 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*) \;\text{ no tiene solución}\}$

[5] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ccccccc} dx & + & (2d-1)y & + & (d+2)z & = & 1 \\ & & (d-1)y & + & (d-3)z & = & 1+d \\ dx & + & (3d-2)y & + & (3d+1)z & = & 2-d \end{array}\right| \qquad (\star)$$

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{d \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución}\}$$

(b) Para $d \in \mathbb{S}$, (Si $\mathbb{S} \neq \emptyset$), determine el conjunto

$$\mathbb{X} \;=\; \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \mid X \text{ es solución de } (*) \right\}$$

[6] Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & & & 3z & = & a+1 \\ -ax & + & y & & & = & -a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los conjuntos:

$\mathbb{S}_1 = \{a \in \mathbb{R}/ \text{ el sistema } (*) \text{ tiene solución }\}$
$\mathbb{S}_2 = \{a \in \mathbb{R}/ \text{ el sistema } (*) \text{ tiene infinitas soluciones }\}$

$\mathbb{S}_3 = \{a \in \mathbb{R} / \text{ el sistema } (*) \text{ no tiene soluciones } \}$

[7] Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los conjuntos:
$\mathbb{S}_1 = \{m \in \mathbb{R} / \text{ el sistema } (*) \text{ tiene solución única}\}$
$\mathbb{S}_2 = \{m \in \mathbb{R} / \text{ el sistema } (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$
$\mathbb{S}_3 = \{m \in \mathbb{R} / \text{ el sistema } (*) \text{ no tiene solución } \}$

Espacios Vectoriales y Subespacios

[1] Demuestre que $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \wedge z + t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$

[2] Demuestre que $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A - 3A = (0)\} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

[3] Demuestre que $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 - 2a_2 - a_3 = 0\} \leq \mathbb{R}_3[x]$

[4] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, donde ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$ entonces demuestre que

(a) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in \mathbb{W}_1 \wedge w_2 \in \mathbb{W}_2\} \leq \mathbb{V}$

(b) $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$

(c) $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \not\leq \mathbb{V}$

(d) $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V} \Longleftrightarrow \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2 \vee \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{W}_1$

(e) Sea $\mathbb{V} = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ funcin}\}$. Si consideramos los subconjuntos de $\mathbb{V}$;

$\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$ entonces

(i) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$

(ii) $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Es decir $\begin{cases} \mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \\ \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\} \end{cases}$

BUEN TRABAJO !!!