Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°2
Coordinación de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Octubre del 2006

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

Profesores Autores de la Guía N°2: Ruth Alcarraz, Luis Arancibia, Miguel Carvajal, Humberto Chacón, Silvana Gómez, Lila Narea, Ricardo Santander

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente, operar con:

(1) Matrices y Determinantes

(2) Números complejos

(3) Sistemas de ecuaciones lineales

(4) Espacios vectoriales (subespacios)

Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta

(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más

(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

Ejercicios Propuestos

Matrices y Determinantes

(1) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{si } i = j \\ 2i - j & \text{si } i \neq j \end{cases}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$ tal que $b_{ij} = j - i + 1$.
Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \mid AX = A^t - 2B\}$$

(2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

(3) Demuestre usando Inducción matemática que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n \quad = \quad \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(4) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. demuestre que

$$A = A^t \quad \Longrightarrow \quad Adj(A) = (Adj(A))^t$$

(5) Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{I} \quad = \quad \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)\}$$

(b) Para $u \in \mathbb{I}$, (si $\mathbb{I} \neq \emptyset$), determine A^{-1}

(c) Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} = 3$ entonces calcule $\det \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix}$

(d) Demuestre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \tan\gamma \\ -\tan\gamma & \tan\beta & 1 \\ \tan\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$$

Números Complejos

(1) Si $z = \sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$. Determine $Re(z)$ e $Im(z)$

(2) Si $x_n + iy_n = \left(2 - 2i\sqrt{3}\right)^n$ entonces demuestre que $\dfrac{x_{10}}{x_8} + \dfrac{y_{10}}{y_8} = 0$

(3) Si $x_n + iy_n = (\sqrt{3} + i)^{6n}$ entonces demuestre que $x_n + 2^6 x_{n-1} = 0$

(4) Si $x_n + iy_n = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ entonces demuestre que $x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(5) Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{1}{x+iy} + \frac{2}{x-iy} = 1 + i\right\}$$

(6) si $\rho = |a + bi|$ entonces demuestre que

$$\sqrt{a+bi} \quad = \quad \pm\left[\sqrt{\frac{\rho+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right]$$

(7) Si $p(z) = z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 \in \mathbb{C}[z]$. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{u \in \mathbb{C} \mid p(u) = 0\}$$

Ayuda: Observe que $p(-1) = 0$

(8) Descomponga en fracciones parciales

$$u(x) \quad = \quad \frac{3x+1}{x^6 - 1}$$

(9) Para el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{lcl} (1+i)z - iw & = & 2+i \\ (2+i)z + (2-i)w & = & 2i \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid (*) \text{ tiene solución}\}$$

Sistemas de Ecuaciones lineales

(1) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} kx + y & = & 1 \\ x + ky & = & 1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los conjuntos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S} & = & \{k \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene soluciones}\} \\ \mathbb{S} & = & \{k \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene infinitas solución}\} \\ \mathbb{S}. & = & \{k \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ No tiene solución}\} \end{array}$$

(2) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & by & - & cz & = & 0 \\ -ax & + & y & - & cz & = & 0 \\ -ax & - & by & + & z & = & 0 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Demuestre que si $(*)$ no tiene solución única entonces se verifica

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1$$

(3) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & (1-\lambda)x_3 & = & 0 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$$

(4) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ entonces Determine el conjunto

$$S \;=\; \{\lambda \in \mathbb{R} \mid AX = \lambda X \text{ tiene infinitas soluciones}\}$$

(5) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} dx & + & (2d-1)y & + & (d+2)z & = & 1 \\ & & (d-1)y & + & (d-3)z & = & 1+d \\ dx & + & (3d-2)y & + & (3d+1)z & = & 2-d \end{array}\right| \qquad (\star)$$

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{d \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución}\}$$

(b) Para $d \in \mathbb{S}$, (Si $\mathbb{S} \neq \emptyset$), determine el conjunto

$$\mathbb{X} \;=\; \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \mid X \text{ es solución de } (*) \right\}$$

Espacios Vectoriales y Subespacios

(1) Demuestre que $\mathbb{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \wedge z + t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$

(2) Demuestre que $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A - 3A = (0)\} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(3) Demuestre que $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 - 2a_2 - a_3 = 0\} \leq \mathbb{R}_3[x]$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, donde ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Si $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$ entonces demuestre que

(a) $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in \mathbb{W}_1 \wedge w_2 \in \mathbb{W}_2\} \leq \mathbb{V}$

(b) $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$

(c) $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \not\leq \mathbb{V}$

(d) $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V} \Longleftrightarrow \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2 \vee \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{W}_1$

(e) Sea $\mathbb{V} = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ función}\}$. Si consideramos los subconjuntos de $\mathbb{V}$;

$\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$ entonces

(i) Demuestre que $\mathbb{W}_1 \leq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_2 \leq \mathbb{V}$

(ii) $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Es decir$\begin{cases} \mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \\ \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\} \end{cases}$

BUEN TRABAJO !!!