Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería civil Álgebra
Año 2007

Guía Adicional Preparando la 3^{ra} PEP

Profesores: Ricardo Santander, Luis Arancibia
Julián Cortés, Luis Riquelme
Septiembre de 2007

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan aplicar estos conocimientos en situaciones nuevas.

2. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.

(3) Gestione de forma eficiente la información

3. Ejercicios Propuestos

3.1. Matrices y Determinantes.

(1) Demuestre que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & tg\,\gamma \\ -tg\,\gamma & tg\,\beta & 1 \\ tg\,\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma$

(2) Verifique sólo usando propiedades que: $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} z & x & y \\ c & a & b \\ r & p & q \end{vmatrix}$

(3) Si $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(4) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(5) Demostrar que: $\begin{vmatrix} x+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & x+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & x+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & x+a^4 \end{vmatrix} = \dfrac{x^3(a(x+a^4)-(x+a))}{a-1}$

(6) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, entonces

(a) Muestre que $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$

(b) Determine A^{-1}

(c) Exprese A^{-1} como un producto de matrices elementales.

3.2. Números Complejos.

(1) Si $p(z) = z^2 - 2z + 2 \in \mathbb{C}[z]$ entonces

(a) Determine $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{C} \mid p(x) = 0\}$

(b) Exprese $p(z)$ como producto de factores lineales en $\mathbb{C}$, e.e. escriba $p(z) = (z-z_1)(z-z_2)$

(2) Exprese en forma binomial los siguientes números complejos:

(a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{5}}\right)$ (b) $\left(\dfrac{(1+i)^3}{4-i}\right)$ (c) $\left(\sqrt{-7+24i}\right)$ (d) $\left(\sqrt{6+i\sqrt{13}}\right)$

(e) $\left(\dfrac{b+iy}{b-iy} - \dfrac{b-iy}{b+iy}\right)$ (f) $\left(\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}\right)$ (g) $\left(\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}\right)$ (h) $\left(\dfrac{69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i}{3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i}\right)$

(3) Determine explícitamente $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ si:

(a) $p(x) = (x-1-i\sqrt{2})(x-2-i\sqrt{3})(x-1+i\sqrt{2})(x-2+i\sqrt{3})$

(b) $p(x) = (x-\sqrt{-4})(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+\sqrt{-4})$

(4) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid (2-5i)x + (1+3i)y - 8 + 9i = 0\}$

(5) Si $rcis\ \alpha = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(r,\alpha) \mid 1 + rcis\,\alpha = 2cis\,60^\circ\}$$

(6) Simplifique, si es posible, el complejo $z = \left(\dfrac{cis\,(-2\alpha) cis^2(\beta)}{cis\,(\alpha+\beta)} + \dfrac{cis\,(2\alpha) cis^2\,(-\beta)}{cis\,(-(\alpha+\beta))} \right)$

(7) Si α es una raíz cúbica de la unidad, es decir $\alpha^3 = 1$. Demuestre que:

$$\text{(a) } (1+\alpha^2)^4 = \alpha \quad \text{y} \quad \text{(b) } (1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5) = 9$$

(8) Si $cos\,\alpha = a$ y $sen\,\alpha = b$ entonces

(a) Determine $cos\,5\alpha$ y $sen\,5\alpha$

(b) Si $cos\,5\,\dfrac{\pi}{10} = 0$, deducir el valor de $cos\,\dfrac{\pi}{10}$

(9) Demuestre que $\dfrac{cos\,5\alpha}{sen\,\alpha} = 16cos^4\,\alpha - 12cos^2\,\alpha + 1$

(10) Sea $p(z) = z^2 - 2z + 2 \in \mathbb{C}[z]$. Si $p(\alpha) = 0$ entonces determine $z = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (\alpha^k + \overline{\alpha}^{\,k})$.

(11) Pruebe que $cos\,\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$.

(12) Demuestre que $\left(z = \dfrac{3}{2 + cos\,\beta + i\,sen\,\beta} \Longrightarrow |z|^2 = 4Re(z) - 3 \right)$.

(13) Si $p(z) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8 \in \mathbb{C}[z]$ tal que

(a) $p(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

(b) Una de las raíces de $p(z)$ tiene módulo 2

Determine todas las raíces de $p(z)$

(14) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y $n \geq 1$. Demuestre que $\left(\dfrac{1}{1+z^n} + \dfrac{1}{1+\overline{z}^{\,n}} \right) \in \mathbb{R}$.

(15) Determine los siguientes subconjuntos del plano complejo, también conocido como Diagrama de Argand:

(a) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$

(b) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 3\}$

(c) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| + |z| = 4\}$

(d) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| - |z| = 1\}$

(e) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| = 5\}$

(16) Determine, si es posible la forma binomial del complejo $z = \dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{1+i+\dfrac{1}{1+i}}}$

(17) Demuestre que la fórmula proposicional

$$F(n): \quad 1 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \cos i\theta \quad = \quad \frac{sen\,(n-\frac{1}{2})\theta}{sen\,\frac{1}{2}\theta}$$

(18) Si definimos la función $\Psi : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\Psi(z) = \begin{pmatrix} Re(z) & -Im(z) \\ Im(z) & Re(z) \end{pmatrix}$, e.e. Para $z = x + iy \in C$ tenemos que

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Entonces demuestre que

(a) $\Psi(z_1 + z_2) = \Psi(z_1) + \Psi(z_2)$.

(b) $\Psi(z_1 \cdot z_2) = \Psi(z_1) \cdot \Psi(z_2)$.

(c) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Psi(\lambda z) = \lambda \Psi(z)$.

(d) $|\Psi(z)| = |z|^2$.

(e) $\psi(\overline{z}) = (\Psi(z))^t$.

(f) $\Psi(z^{-1}) = (\Psi(z))^{-1}$.

(g) $z \in \mathbb{R} \Longrightarrow \Psi_z$ es una matriz simétrica.

(h) $|z| = 1 \Longrightarrow \Psi(z)$ es una matriz ortogonal. (Una matriz M se llama ortogonal si $MM^t = I$).

3.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

(1) Usando el teorema del rango determine si los siguientes sistemas tienen o no solución, en caso afirmativo, determine la solución o las soluciones.

(a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & & & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 9y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right|$ (b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & 7z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 8z & = & 2 \\ 6x & + & 4y & - & 14z & = & 5 \end{array}\right|$

(c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & -18 \end{array}\right|$ (d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right|$

(e) $\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & -8 \end{array}\right|$ (f) $\left.\begin{array}{ccccccr} (1-i)x & - & iy & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & (1+i)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & -i \end{array}\right|$

(2) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2-4)x_3 & = & a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{Tiene solución única}\} \\ \mathbb{S}_1 & = & \{a \in \mathbb{R} \mid (*)\text{No tiene solución}\} \end{array}$$

(3) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcccccc} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine

(a) $S_1 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*)$ tiene solución única$\}$
(b) $S_2 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*)$ tiene infinitas soluciones $\}$
(c) $S_3 = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (*)$ no tiene solución $\}$

¡BUEN TRABAJO !