Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°4
Coordinación de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Noviembre del 2006

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Autores

Luis Arancibia, Miguel Carvajal, Humberto Chacón, Silvana Gómez, Lila Narea, Gabriel Rabanales, Ricardo Santander.

2. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente, operar con:

(1) Espacios vectoriales

  (a) Generadores
  (b) Dependencia e Independencia lineal
  (c) Base
  (d) Dimensión
  (e) Coordenadas de un vector
  (f) Matriz Cambio de base

(2) Transformaciones lineales

  (a) Núcleo e Imagen
  (b) Teorema de la dimensión
  (c) Isomorfismo
  (d) Representación matricial de una transformación lineal

(3) Valores y vectores propios

3. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema
(2) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta
(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más.
(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

4. Ejercicios Propuestos

4.1. Espacios Vectoriales.

(1) Determine el conjunto

$$S=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (-2,b,1)\in\langle\{(a,0,2),(4,a,-2),(-2a,-2,a)\}\rangle\}$$

(2) Determine si los siguientes conjuntos son subespacios en el espacio vectorial correspondiente. En caso afirmativo, determine una base para el subespacio.

(a) $\mathbb{W}=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2-c^2-d^2=0\}$

(b) $\mathbb{W}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid [a=d\wedge b=0\wedge c=2d]\right\}$

(c) $\mathbb{W}=\left\{B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid B\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot B\right\}$

(3) Sea $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta=\{w_1,w_2,\dots,w_n\} \text{ tal que } w_i=av_1+v_i \quad (i=1,2,\dots n),(a\in\mathbb{K}) \text{ es una base de } \mathbb{V}$$

(4) Si $\alpha=\left\{\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 6 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 4\\ 4 & a\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces determine el conjunto

$$\beta=\{a\in\mathbb{R} \mid \alpha \text{ No es una base de } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\}$$

(5) Si $\alpha=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

(a) Demuestre que α es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right]_{\alpha}$

(6) Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a\\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & b\\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (*)$$

(a) Demuestre que $\mathbb{W}=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ Tiene solución }\}\le\mathbb{R}^3$

(b) A partir de una base del subespacio $\mathbb{W}$ obtenga una base de $\mathbb{R}^3$

(7) Si $\alpha=\{x,3+x^2,x+2x^2\}\subset\mathbb{R}_2x$ y $\beta=\{x+3,x-2,x^2+1\}\subset\mathbb{R}_2x$ entonces

(a) Demuestre que α y β son dos bases de $\mathbb{R}^3$

(b) Determine

(i) $[6-4x+8x^2]_{\alpha}\ \wedge\ [6-4x+8x^2]_{\beta}$

(ii) $[9-x+7x^2\ ]_{\beta}\ \wedge\ [9-x+7x^2]_{\alpha}$

(iii) $[I]_{\alpha}^{\beta}$ y $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(c) Muestre que,

(i) $[I]_{\alpha}^{\beta}[6-4x+8x^2]_{\alpha}=[6-4x+8x^2]_{\beta}$

(ii) $[I]_{\beta}^{\alpha}[9-x+7x^2\ ]_{\beta}=[9-x+7x^2\ ]_{\alpha}$

(8) Sea $\alpha = \{1, x, x^2+1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$

(a) Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}_2[x]$

(b) Si $[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine la base β

(c) Determine $[1+2x-4x^2]_\alpha$

4.2. Transformaciones lineales.

(1) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{M}_\mathbb{R}(2) \quad \text{tal que} \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y-z \\ y-x & z-y \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$g : \mathbb{M}_\mathbb{R}(2) \longmapsto \mathbb{R}_2[x] \quad \text{tal que} \quad g\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{21} + (a_{12}+a_{22})x + a_{11}x^2$$

(a) Demuestre que $f \in \mathbb{L}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^3, \mathbb{M}_\mathbb{R}(2))$, $g \in \mathbb{L}_\mathbb{R}(\mathbb{M}_\mathbb{R}(2), (\mathbb{R}_2[x])$ y $(g \circ f) \in \mathbb{L}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}_2[x])$

(b) Determine $\ker(f)$ y $\dim_\mathbb{R}(\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$ y $\dim_\mathbb{R}(Img(f)$

(d) Determine $\ker(g)$ y $\dim_\mathbb{R} \ker(g)$

(e) Determine $Img(g)$ y $\dim_\mathbb{R}(Img(g)$

(f) Si $c(3) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $m(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $pol(2) = \{1, x, x^2\}$ son las llamadas bases canónicas de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{M}_\mathbb{R}(2))$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente entonces

(i) Determine $[f]_{c(3)}^{m(2)}$, $[g]_{m(2)}^{pol(2)}$ y $[g \circ f]_{c(3)}^{pol(2)}$

(ii) Calcule $\det[g \circ f]_{c(3)}^{pol(2)}$. ¿ Es $g \circ f$ un isomorfismo?

(iii) ¿Es posible calcular $\det[f]_{c(3)}^{m(2)}$?, y ¿Es posible calcular $\det[g]_{m(2)}^{pol(2)}$?

(2) Considere la función $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a,b,c) = (a+b)(x-1) + (b+c)x^2$

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$

(b) Determine $\ker(T)$ e $Img(T)$

(3) Sea $S_{\mathbb{M}_\mathbb{R}(2)} = \{A \in \mathbb{M}_\mathbb{R}(2) \mid A = A^t\}$ y considere la función $T : S_{\mathbb{M}_\mathbb{R}(2)} \longmapsto \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (b,d,a)$.

(a) Demuestre que T es un isomorfismo

(b) Determine T^{-1}

(c) Si $H : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $H(x,y) = x, x+y, -y$ entonces determine $T^{-1} \circ H$

(4) Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales tal que

(a) $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{V}$
(b) $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ es una base de $\mathbb{W}$, y
(c) $T : \mathbb{V} \longmapsto \mathbb{W}$ es una función que verifica: $T(u_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} j w_j \quad (i = 1, 2, 3)$

entonces

(a) Determine explícitamente, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$
(b) Determine la matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$
(c) ¿T es un isomorfismo?

(5) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{aligned} T(-1,3) &= (3,-2) \\ T(5,3) &= (-6,4) \end{aligned}$$

(a) Determine explícitamente T
(b) ¿ Es T inyectiva ?
(c) Calcule $\det(T)$
(d) ¿Es T invertible?

(6) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_1[x])$ tal que

(a) $T(a,b) = a - b + ax$
(b) $\beta = \{1, 1-x\}$ es una base de $\mathbb{R}_1[x]$), y
(c) $[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

entonces determine la base α de $\mathbb{R}^2$

(7) Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que
(a) $\ker(T) = \{(4,-7,5)\}$
(b) $Img(T) = \{(2,-1,1), (-1,3,2)\}$

4.3. Valores y vectores propios.

(1) Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que
(a) $\left(\mathbb{R}^2\right)_2 = \{(6,2)\}$
(b) $\left(\mathbb{R}^2\right)_3 = \{(-2,1)\}$

(2) Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que

(a) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_{-2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$
(b) $((\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)))_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(3) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_2 x + a_1 x^2$

(a) Determine sus valores propios y subespacios propios.

(b) ¿ Es T un isomorfismo?

(4) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$

(a) Determine sus valores propios y subespacios propios
(b) ¿ Es T un isomorfismo?

(5) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Determine sus valores propios y subespacios propios
(b) ¿ Es T un isomorfismo?

(6) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Determine sus valores propios y subespacios propios
(b) ¿ Es T un isomorfismo?

BUEN TRABAJO !!!