Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Guía Adicional Preparando la PEP 4 de Álgebra
Profesor Coordinador Ricardo Santander B.
Diciembre de 2008

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan aplicar estos conocimientos en situaciones nuevas.

2. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.

(3) Gestione de forma eficiente la información

3. Ejercicios Propuestos Espacios vectoriales

3.1. Espacios vectoriales.

(1) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y + 3z = 0\}$

(a) Muestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3$

(b) Determine $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

(2) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 2a_0 - a_1 + 3a_2 = 0\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(b) Determine $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

(3) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 2a_0 - a_1 + 3a_2 = 0\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

(b) Determine $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

(4) Si $\mathbb{W} = \left\{ A = (a_{ii}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \sum_{i=1}^{2} a_{ii} = 0 \right\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq M_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Determine $\mathbb{U} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$

(5) Considere el conjunto $\alpha = \{1 + 2x + 3x^2, 2 - x + 4x^2, 3 + cx + 4x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$. Determine el conjunto

$$\mathbb{I} \;\; = \;\; \{c \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ sea linealmente independiente}\}$$

(6) Considere el conjunto $\alpha = \{1 + 2x + 3x^2, 2 + 4x + 6x^2, 3 + cx + 4x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$. Determine el conjunto

$$\mathbb{I} \;\; = \;\; \{c \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ sea linealmente independiente}\}$$

(7) Si $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una $\mathbb{K}$ base $\mathbb{V}$. Determine si, es posible que $\beta = \{v_1 + 2v_2, v_1 - 3v_3, v_1 - 2v_2 + 3v_3\}$ sea también una base de $\mathbb{V}$

(8) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ tal que $w_j = \sum_{i=1}^{j} 2v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Demuestre, si es posible, que β es también una base de $\mathbb{V}$.

(9) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$. Demuestre que A invertible si y sólo si sus filas son linealmente independientes en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(1 \times n)$

(10) Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ entonces demuestre que $\beta = \{v_1, \ldots, v_n, u\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{V}$. Por favor ingeniero e ingeniera de primer año, sean cuidadosos con el control y analicen todas las posibilidades.

(11) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que α linealmente independiente $\mathbb{V} \Longleftrightarrow \alpha$ es un sistema de generadores $\mathbb{V}$

(12) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, Considere los conjuntos $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ y $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $u_s = \sum_{i=1}^{s} v_{s+1-i}$, para $s = 1, 2, \ldots n$.

(a) Demuestre que α base de $\mathbb{V} \Longrightarrow \beta$ base de $\mathbb{V}$

(b) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$

(13) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si $[I]_{c(3)}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine la base α

(14) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Si A es una matriz cambio de base entonces $\det(A) \neq 0$

(15) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$, y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si definimos la matriz $A = (a_{ij})\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ tal que $a_{ij} = i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Determine, si es posible, una base β de $\mathbb{V}$ tal que $A = [I]_{\alpha}^{\beta}$

(16) Define en $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ la siguiente relación

$$A \Re B \iff (\exists P; P \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))) : B = P \cdot A \cdot P^{-1} \tag{1}$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

(b) Demuestre que $A \Re B \Longrightarrow \det(A) = \det(B)$

3.2. Producto Interno.

(1) Sea $\mathbb{V} = \langle\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}\rangle$. Define en $\mathbb{V}$ el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Demuestre que $\mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle,\rangle$ de dimensión n.

(a) Demuestre que $\langle u, v\rangle = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall v, v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

(b) Demuestre que $\langle u - v, w\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall w, w \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = v$

(3) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$

(a) Determine una base ortogonal de $\mathbb{W}$

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) $d((x, y, z), \mathbb{W})$

(4) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$.

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$

(5) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0 \wedge z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Calcule $d((1, 1, 0, 0), W)$

(6) Sea $\mathbb{W} = \{(1, 2, 4, 0), (0, -1, 3, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) ¿$\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$?

(7) Consideremos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ con el producto interno usual, es decir, $\langle A, B\rangle = tr(B^t \cdot A)$.

(a) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid tr(A) = 0\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$

(8) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2) \tag{2}$$

(a) Sea $\alpha = \{1, 1 - x, 1 - x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$. Determine una base ortogonal respecto del producto interno definido en (2)

(b) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 = 0\}$. Determine $\mathbb{W}^{\perp}$ respecto del producto interno definido en (2)

(c) Es posible que $\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

(9) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 + a_1 - 3a_2 = 0\}$ entonces determine respecto de (2)

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Calcule $d(1 + x + x^2, \mathbb{W})$

(10) En $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios hasta grado 2, considere el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle \quad = \quad \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx \tag{3}$$

(a) Determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en (3) a partir de la base canónica $pol(2) = \{1, x, x^2\}$

(b) Si $\mathbb{W} = \langle\{1 - x\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Si $\mathbb{W} = \langle\{1, 1 + x\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{P}_{\mathbb{W}}$

(11) Sea $\mathbb{V}, \langle,\rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y sea $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\alpha' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno $\langle,\rangle$ obtenida de la base α. Demuestre que

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \alpha = \alpha'$$

(12) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}} = P_{\mathbb{W}}$

(b) $P_{\mathbb{W}}$ es sobreyectiva

(c) $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

(d) $P_{\mathbb{W}}(w) = w \Longleftrightarrow w \in \mathbb{W}$

(e) $u \in \mathbb{W}^{\perp} \Longleftrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = 0_{\mathbb{V}}$

(13) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow u \in \mathbb{W}$

(b) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \Longleftrightarrow P_{\mathbb{W}}(u) = u$

(14) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n con producto interno $\langle , \rangle$, y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle , \rangle \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

(15) Si $(V, \langle , \rangle, \mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial entonces demuestre que

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}[\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$$

3.3. Transformaciones Lineales.

(1) Sea $T : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 3x + w & x - y \\ 2y - z & x - 3w \end{pmatrix}$

(a) Muestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$

(b) Determine $\ker(T)$ e $\text{Img}(T)$

(c) ¿T es un isomorfismo ?

(d) Si consideramos $c(4) = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, y $m(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, la base canónica de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces calcule $\det[T]_{c(4)}^{m(2)}$

(e) Si consideramos las dos nuevas bases $\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. Determine $[T]_{\alpha}^{\beta}$

(f) Demuestre que $[T]_{c(4)}^{m(2)} \Re [T]_{\alpha}^{\beta}$, (Esta relación $\Re$ fue definida en (1))

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Demuestre que

(a) $[T]_{\alpha}^{\alpha} \Re [T]_{\beta}^{\beta}$

(b) $\det[T]_{\alpha}^{\alpha} = \det[T]_{\beta}^{\beta}$

(3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x + \mu y - z, 2\mu x + \mu z, x - \mu y + (1 + \mu)z)$ entonces

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ para cada $\mu \in \mathbb{R}$

(b) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{\mu \in \mathbb{R} \mid T \text{ es isomorfismo}\}$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $\ker(T) = \langle\{(1, 1, 1)\}\rangle$

(b) $\text{Img} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

(5) Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que

(a) $\ker(T) = \{(1, 1, 1)\}$

(b) $Img(T) = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (-2, -1, 0)\}$

(6) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $\ker(T) = \langle\{1 + x\}\rangle$

(7) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $\text{Img}(T) = \langle\{1 + x\}\rangle$

(8) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que verifique simultáneamente las condiciones

(a) $\ker(T) = \{1\}$

(b) $\text{Img}(T) = \langle\{1 - x, 1 - x^2, x - x^2\}\rangle$

(9) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), \mathbb{R}^3)$ tal que verifique simultáneamente las condiciones

(a) $\ker(T) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$

(b) T sobreyectiva

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ tal que T no nula. Demuestre que

(a) $\mathbb{V} = \{u \in \mathbb{V} \mid (T \circ T)(u) = 0_{\mathbb{V}}\} \Longrightarrow T$ no inyectiva

(b) $\mathbb{V} = \{(T \circ T)(u) \mid u \in \mathbb{V}\} \Longrightarrow T$ sobreyectiva

BUEN TRABAJO !!!