Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°1
Coordinador de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Mayo del 2008

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Autores y Aportes

Profesores: Arancibia Luis, Carvajal Miguel, Chacón Humberto, Gonzáles Luz, Muñoz Miguel, Narea Lila, Riquelme Luis, Rivera Eugenio, Riveros Luis, Santander Ricardo.

Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente

(1) Operar con polinomios

(2) Demostrar el valor de verdad de proposiciones lógicas, usando tablas de verdad o bien propiedades

(3) Demostrar la validez de fórmulas proposicionales usando el método de Inducción matemática

(4) Determinar rápida y eficientemente los elementos de sucesiones numéricas que poseen las propiedades de progresiones aritméticas y geométricas

(5) Determinar rápida y eficientemente cualquier término de un desarrollo binomial

Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.

(3) Gestione de forma eficiente la información

Ejercicios Propuestos

(1) Demuestre que en cualquiera sea la base B, el número 1010101 no es primo

(2) Demuestre que $121_{(m)} = ((m+1)^2)_{(10)}$, entiéndase 10 como base decimal.

(3) ¿$(a+b)^m - a^m - a^n$ es divisible por $(a+b)$, si m es impar?. Justifique su respuesta.

(4) Demuestre que el polinomio $(a-3)^2n + (a-2)^n - 1$ es divisible por $(a-3)(a-2)$

(5) Determine m y n de modo que el polinomio $q(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4$
sea un cuadrado perfecto

(6) Se define el conectivo lógico # como sigue: $q\#p = [p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim p)] \vee q \vee p$, entonces demuestre que

$$(\sim p \Rightarrow q)\#[(p\wedge \sim q)\# \sim q)\# \sim q] \equiv T$$

(es una Tautología)

(7) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s si se sabe que la siguiente proposición es verdadera.

$$[s \Rightarrow ((\sim r \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \sim r)))] \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r]$$

(8) Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones proposicionales. Muestre que si

$$(\exists! x)(p(x)) \wedge (\exists! x)(q(x)).$$

entonces la siguiente proposición es verdadera

$$(\exists! x)(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists! x)(p(x) \wedge q(x)).$$

(9) En cada caso determine la suma dada:

(a) $\displaystyle\sum_{k=10}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} k^3$ si se sabe que $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(kn) = 10500$.

(10) En cada caso determine la suma dada:

(a) $\displaystyle\sum_{k=10}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} k^3$ si se sabe que $\sum_{k=1}^{20}(kn) = 10500$.

(11) Calcular:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$$

(12) Determine si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2x_k - c)^2 = 1050$, si se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{9} x_k = 50 \qquad \sum_{k=1}^{9} x_k^2 = 100 \qquad 3\sum_{k=1}^{10} x_k = 180,$$

(13) Demuestre que para todo número natural n se tiene que:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}.$$

Donde $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(14) Demuestre que para todo número natural n se tiene que:

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(15) Demuestre que si n es un número natural impar entonces $7^n + 1$ es divisible por 8.

(16) Considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que: $x_1 = 1, x_2 = 1$ y $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, para todo $n \geq 3$. Demuestre por inducción que para todo n natural se tiene que $x_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

(17) a, b y c son tres números reales positivos y están en P.A.
Demuestre que: $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ están en una P.A.

(18) $\{a_i\}$ es una P.A. $a_i \neq 0$, $(\forall i)$. Demuestre que $\{\dfrac{1}{a_{(i-1)}a_i}\}$ es P.A.

(19) $\{x_i\}$ es una P.A., $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = b^2$, obtenga $\{x_i\}$

(20) $\{a_i\}$ es una P.G., se sabe que $a_{m+n} = A$ y $a_{m-n} = B$. Si $A \neq 0$, obtener a_m y a_n.

(21) Obtenga el valor de la siguiente suma $1 + 11 + 111 + \cdots + 111\cdots1$, donde el último número tiene n unos.

(22) $\{a_i\}_{i=1\ldots n}$ es una P.A. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$

(23) Demuestre que el número $\underbrace{444\cdots4}_{n \text{ cuatros}}\underbrace{888\cdots8}_{(n-1) \text{ ochos}}9$ es un cuadrado perfecto.

(24) Considerando el desarrollo de $(3x+1)^{2n} + (3x-1)^{2n}$, demuestre que
$\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} 9^{n-m} = \frac{1}{2}(4^{2n} + 2^{2n})$

(25) Resolver la ecuación $9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ si sus raíces están en P.A.

(26) Resuelva la ecuación $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ si sus raíces están en P.G.

(27) Dada $x^3 - 2x^2 + kx + 46 = 0$. Determínese k y resuélvase la ecuación si las raíces están en P.A.

(28) ¿Qué relación existe entre p, q y r si las raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ están en P.G.

(29) Resolver la ecuación $4x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 11x + 10 = 0$ si las raíces están en P.A.

(30) Determínese k en la ecuación $2x^4 - 15x^3 + kx^2 - 30x + 8 = 0$ y resuélvase sabiendo que las raíces están en P.G.

(31) Determine b para que el coeficiente del término en x^4 sea ocho veces el coeficiente del término en x^3 en el desarrollo de $(2x + b)^5$

(32) En el desarrollo de $\left(x^2 + x^{-1}\right)^n$ el coeficiente de T_4 y T_{13} son iguales. Determine el término independiente de x

(33) En el desarrollo de $\left(z^{-\frac{3}{2}} - z^{\frac{1}{3}}\right)^n$ la razón entre el coeficiente binomial de T_3 y de T_5 es $\dfrac{2}{7}$. Determine el término que tiene a $z^{-\frac{5}{2}}$

(34) Simplifique: $(\sqrt{2} + 1)^5 - (\sqrt{2} - 1)^5$

(35) Determine r si el coeficiente de x^r y de x^{r+1} en $(3x + 2)^{19}$ son iguales.

(36) Los coeficientes numéricos de T_{10} y de T_8 en el desarrollo de $(2 - x)^n$ están el la razón de 5 es a 72. Obtenga n

(37) En el desarrollo de $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4})^n$ ocurre que el coeficiente de T_3 excede al de T_2 en 44 unidades. Determine el coeficiente del término que no contiene x.

(38) Determine n en la expresión $\left(\sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ si en el desarrollo de la potencia del binomio, la relación entre el término séptimo contado desde el principio y el término séptimo contado desde el final es $\dfrac{1}{6}$.

BUEN TRABAJO !!!