Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios para PEP N°1
Coordinador de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Mayo del 2009

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, los profesores de nuestra coordinación les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en primera instancia, en el más breve plazo desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente

(1) Operar con polinomios

(2) Demostrar el valor de verdad de proposiciones lógicas, usando tablas de verdad o bien propiedades

(3) Demostrar la validez de fórmulas proposicionales usando el método de Inducción matemática

(4) Determinar rápida y eficientemente los elementos de sucesiones numéricas que poseen las propiedades de progresiones aritméticas y geométricas

(5) Determinar rápida y eficientemente cualquier término de un desarrollo binomial

(6) Identificar elementos diferentes de un conjunto, a través del concepto de relación de equivalencia

Y en segunda instancia, la competencia más importante para nosotros, que consigan expresar de manera clara precisa y estructurada sus conclusiones, sin duda esta es la parte más compleja y difícil de realizar, pero tengan certeza que esta propiedad no viene en el ADN, y por tanto quien ya la obtuvo lo hizo sólo persistiendo en el trabajo, y una buena idea será imitarlo.

Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.

(3) Gestione de forma eficiente la información

1. Ejercicios Propuestos

1.1. Bases Numéricas y Polinomios.

(1) Exprese en base 2: (a) $x = 45$ (b) $x = 318$ (c) $x = 2402$

(2) Exprese en el sistema decimal: (a) $x = 24512$ (base 7) (b) $x = 1231231$(base 4)

(3) Sin pasar por el sistema decimal, realice las siguientes conversiones:

Escriba en base 8: (a) $x = 321322$ (base 4) (b) $x = 2122$(base 4) (c) $x = 12321$(base 4)

Escriba en base 3: (a) $x = 666666$ (base 9)

(4) Demuestre que en cualquiera sea la base B, el número 101010101 no es primo

(5) Demuestre que $121_{(m)} = ((m+1)^2)_{(10)}$, entiéndase 10 como base decimal.

(6) ¿$(a+b)^m - a^m - b^m$ es divisible por $(a+b)$, si m es impar?. Justifique su respuesta.

(7) Demuestre que el polinomio $(a-3)^{2n} + (a-2)^n - 1$ es divisible por $(a-3)(a-2)$

(8) Determine m y n de modo que el polinomio $q(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4$ sea un cuadrado perfecto

1.2. Lógica.

(1) Se define el conectivo lógico # y se ha hecho así: $q\#p = [p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim p)] \vee q \vee p$, entonces demuestre que

$$(\sim p \Rightarrow q)\#[(p \wedge \sim q)\# \sim q)\# \sim q] \equiv T$$

Es decir T es una Tautología

(2) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s si se sabe que la siguiente proposición es verdadera.

$$[s \Rightarrow ((\sim r \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow \sim r)))] \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \wedge s \wedge \sim r]$$

(3) Demuestre usando propiedades que

$$\{[p \Longrightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \Longrightarrow r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \equiv p \wedge q$$

(4) Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones proposicionales. Muestre que si

$$(\exists! x)(p(x)) \wedge (\exists! x)(q(x)).$$

entonces la siguiente proposición es verdadera

$$(\exists! x)(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists! x)(p(x) \wedge q(x)).$$

1.3. Sumatorias.

(1) En cada caso determine la suma dada:

(a) $\displaystyle\sum_{k=10}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{n}k^3$ si se sabe que $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(kn)=10500$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$

(2) Determine si existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2x_k-c)^2=1050$, si se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{9}x_k=50 \qquad \sum_{k=1}^{9}x_k^2=100 \qquad 3\sum_{k=1}^{10}x_k=180,$$

1.4. Inducción Matemática.

(1) Demuestre que para todo número natural n se tiene que:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2}=\binom{n+2}{3}.$$

Donde $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(2) Demuestre que para todo número natural n se tiene que:

$$2(\sqrt{n+1}-1)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(3) Demuestre usando Inducción matemática que $3^{2n+1}+2^{n+2}\quad(\forall n; n\in\mathbb{N})$, es múltiplo de 7

(4) Demuestre que si n es un número natural impar entonces 7^n+1 es divisible por 8.

(5) Considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que: $x_1=1, x_2=1$ y $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, para todo $n\geq 3$. Demuestre por inducción que para todo n natural se tiene que $x_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$.

1.5. Progresiones.

(1) Si $\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}^+$ es una progresión aritmética entonces demuestre que $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right\}$ es también una progresión aritmética

(2) Si $\{a_i\mid i\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}-\{0\}$ es una progresión aritmética entonces demuestre que $\left\{\dfrac{1}{a_{(i-1)}a_i}\right\}$ es también una progresión aritmética

(3) Si $A=\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ es una progresión aritmética tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=a$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2=b^2$, entonces determine la progresión A

(4) Si $\{a_i\mid i\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ es una progresión geométrica tal que $a_{m+n}=A\ \emptyset$ y $a_{m-n}=B$ entonces determine a_m y a_n.

(5) Obtenga el valor de la siguiente suma $1 + 11 + 111 + \cdots + 111\cdots 1$, donde el último número tiene n unos.

(6) Si $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^+ - \{0\}$ es una progresión aritmética entonces demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

(7) Resuelva la ecuación $9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ si sus raíces están en progresión aritmética

(8) Resuelva la ecuación $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ si sus raíces están en progresión geométrica

(9) Si $p(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 46$ entonces Determine k y resuelva la ecuación $p(x) = 0$, si sus raíces están en progresión aritmética

(10) Si $p(x) = 2x^4 - 15x^3 + kx^2 - 30x + 8$ entonces determine k y resuelva la ecuación $p(x) = 0$, si sus raíces están en progresión geométrica

(11) ¿Qué relación existe entre p, q y r si las raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ están en progresión geométrica

(12) Resuelva la ecuación $4x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 11x + 10 = 0$ si sus raíces están en progresión aritmética

1.6. Teorema del Binomio.

(1) Determine b para que el coeficiente del término en x^4 sea ocho veces el coeficiente del término en x^3 en el desarrollo de $(2x + b)^5$

(2) En el desrrollo de $\left(ax^{\frac{-1}{2}} + xa^{\frac{-1}{2}}\right)^n$ se tiene que: $\dfrac{\text{coeficiente de } T_3}{\text{coeficiente de } T_2} = \dfrac{11}{2}$, Calcule n

(3) En el desarrollo de $\left(x^2 + x^{-1}\right)^n$ el coeficiente de T_4 y T_{13} son iguales. Determine el término independiente de x

(4) En el desrrollo de $\left(z^{\frac{-3}{2}} - z^{\frac{1}{3}}\right)^n$ la razón entre el coeficiente binomial de T_3 y de T_5 es $\dfrac{2}{7}$. Determine el término que tiene a $z^{\frac{-5}{2}}$

(5) Simplifique: $(\sqrt{2} + 1)^5 - (\sqrt{2} - 1)^5$

(6) Determine r si el coeficiente de x^r y de x^{r+1} en $(3x + 2)^{19}$ son iguales

(7) Los coeficientes numéricos de T_{10} y de T_8 en el desarrollo de $(2 - x)^n$ están el la razón de 5 es a 72. Obtenga n

(8) En el desarrollo de $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4})^n$ ocurre que el coeficiente de T_3 excede al de T_2 en 44 unidades. Determine el coeficiente del término que no contiene x

(9) Determine n en la expresión $\left(\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ si en el desarrollo de la potencia del binomio, la relación entre el término séptimo contado desde el principio y el término séptimo contado desde el final es $\dfrac{1}{6}$

(10) Considerando el desarrollo de $(3x+1)^{2n}+(3x-1)^{2n}$, demuestre que

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{2n}{2m}9^{n-m}=\frac{1}{2}(4^{2n}+2^{2n})$$

1.7. Relaciones.

(1) Sea $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ y $P(A)=\{X \mid X\subset A\}$. Defina en $P(A)$ la siguiente relación

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow X-\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}=Y-\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$$

.

- Demuestre que R es relación de equivalencia.
- Determine las clases de $\overline{\emptyset}$ y $\overline{\{5\}}$

(2) Sea $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y $P(A)=\{X \mid X\subset A\}$. Defina en $P(A)$ la siguiente relación

$$X\ R\ Y \Leftrightarrow X\subset Y$$

.

Determine las propiedades que cumple R y confeccione un diagrama que la represente

(3) Si R y S son dos relaciones entonces demuestre que

- $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$
- $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$

(4) Sea R una relación. Demuestre que

$$R \text{ es transitiva } \Leftrightarrow R\circ R\subset R$$

(5) Diremos que una relación R es circular si verifica la siguiente propiedad. $aRb\wedge bRc \Longrightarrow cRa$. demuestre que

$$R \text{ refleja y circular } \Longrightarrow R \text{ es relación de equivalencia}$$

(6) Sean $R\subset A^2$ y $S\subset A^2$ dos relaciones de equivalencia ¿Es $R\circ S$? una relación de equivalencia

(7) Sea $\mathbb{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$. Define en $\mathbb{R}^3$ la relación

$$(x_1,y_1,z_1)\ R\ (x_2,y_2,z_2) \quad\Longleftrightarrow\quad (x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)\in\mathbb{W}$$

- Demuestre que R es una relación de equivalencia

- Demuestre que $\mathbb{W} = \overline{(0,0,0)}$
- Determine $\overline{\mathbb{R}^3} = \left\{\overline{(x,y,z)} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$

(8) Sea $\mathbb{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Define en $\mathbb{R}^3$ la relación

$$(x_1,y_1,z_1)\ R\ (x_2,y_2,z_2) \iff (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \in \mathbb{W}$$

- Demuestre que R es una relación de equivalencia
- Demuestre que $\mathbb{W} = \overline{(0,0,0)}$
- Determine $\overline{\mathbb{R}^3} = \left\{\overline{(x,y,z)} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$

(9) Sea $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a_0 - a_1 = 0\}$. Define en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación

$$p(x)\ R\ q(x) \iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{W}$$

- Demuestre que R es una relación de equivalencia
- Demuestre que $\mathbb{W} = \overline{0 + 0x + 0x^2}$
- Determine $\overline{\mathbb{R}_2[x]} = \left\{\overline{p(x)} \mid p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\right\}$

BUEN TRABAJO !!!