Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°2
Coordinador de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Junio de 2009

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el fin de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente iniciar su perfeccionamiento en el arte de enfrentar con éxito la resolución de situaciones nuevas.

2. Ejercicios Propuestos

2.1. Funciones.

(1) Si definimos la función $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y,z) = (x+my-z, 2mx+mz, x-my+(1+m)z)$. Determine

(a) $S_1 = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ es inyectiva}\}$, y

(b) $S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ no es sobreyectiva}\}$

(2) Considere $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ función definida por: $T(a,b,c) = (a+2b+3c)x^2+(2a+5b-4c)x+(3a+7b+8c)$

(a) Determine imagen de T.
(b) Determine si T es biyectiva. Si su respuesta es afirmativa determine T^{-1}.

(3) Si $f:\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $f(x-5) = x^2-1$ para todo número real. Determine, si es posible, $f(x)$ $(\forall x; x \in \mathbb{R})$.

(4) Si $f:\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $f(2x+1) = 5x-4$ para todo número real. Determine, si es posible, $f(x)$ $(\forall x; x \in \mathbb{R})$.

(5) Si $f:\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $f\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = x+7$ para todo número real. Determine, si es posible, $f(x)$ $(\forall x; x \in \mathbb{R})$.

(6) Sea $f:\mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f((a_0+a_1x+a_2x^2)) = (a_0-a_2,\ a_1+2a_0,\ 3a_1-a_2)$

(a) Demuestre que f es una función.
(b) ¿f es una biyección?

(7) Sea $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = (x+2,\ 2x-3)$.

(a) ¿f esuna función?,
(b) Si $f$es una función ¿es inyectiva?, ¿ es sobreyectiva?

(8) Sean A y B conjuntos no vacíos y considere las funciones $f : A \longmapsto B \wedge g : B \longmapsto C$. Demuestre que

   (a) $(g \circ f)$ epiyectiva $\Longrightarrow g$ epiyectiva.
   (b) $(g \circ f)$ inyectiva $\Longrightarrow f$ inyectiva.

(9) Sean $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $b \in \mathbb{R}$, fijos. Define la función $f_{ab} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f_{ab}(x) = ax + b$. Demuestre que f_{ab} es una biyección.

(10) Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longmapsto B$ una función. Si para $X_i \subset A$, $(i = 1, 2)$ definimos el conjunto $f(X_i) = \{f(x) \in B \mid x \in X_i\}$, para $(i = 1, 2)$ entonces demuestre que

   (a) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$
   (b) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2) \Longleftrightarrow f$ es inyectiva

2.2. Otras Funciones.

(1) Una función f será llamada función par, si satisface la condición $f(-x) = f(x)$, $(\forall x; x \in dom(f))$. Una función g será llamada impar si $g(-x) = -g(x)$, $(\forall x; x \in dom(g))$.

   (a) Demuestre que si f par y g par entonces $f \cdot g$ es una función par

   (b) Demuestre que si f par y g impar entonces $f \cdot g$ impar

   (c) Si f y g son ambas función par entonces estudie la paridad de la función $f \circ g$

(2) Una función será llamada una función lineal si satisface las propiedades:

   (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

   (ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

   Dentro de las siguientes funciones, ¿cuál o cuáles se pueden clasificar como función lineal?

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f((x, y, z)) = (2x - 3y,\ y + 4z)$

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f((x, y)) = \dfrac{2x - 3y}{5}$

   (c) $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f((x, y, z)) = (2x - 5y + 1, 3y - 2z - 1)$

   (d) $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f(x) = (x, 3x, 7x)$

2.3. Grupos y Homomorfismos de Grupos.

(1) Sea $G = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 1\}$. Define en G la operación binaria: $a * b = \dfrac{a + b}{1 + ab}$

   (a) Determine (si existe), el elemento neutro respecto de la operación $*$

   (b) Determine (si existe), el elemento inverso para cada elemento de G.

   (c) Demuestre que que $*$ es una operación conmutativa.

(2) En $\mathbb{R} - \{1\}$ define la operación binaria $a * b = a + b + ab$.

(a) Determine si $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ es grupo

(b) Determine, si es posible las soluciones de la ecuación $2 * x * 3 = 7$

(3) Sea $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 \cdot x^3 + 5x_2 \cdot x^2 - x_3 \cdot x + 3x_4$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(4) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 2x_{11} + 5x_{12} - x_{21} - x_{22}$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(5) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} = (2x_{11} + 5x_{12}, x_{11} - x_{13})$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(6) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 3) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $f\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_{11} - 5x_{12}) & (x_{21} - x_{13}) \\ x_{22} & x_{11} + x_{23} \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(f)$

(c) Determine $Img(f)$

(7) Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A) = A - A^t$

(a) Demuestre que f es un homomorfismo de Grupos

(b) ¿f es un isomorfismo?. Justifique su respuesta.

(8) Considere las funciones $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = bx^2 + (a + c)x$ y $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $g(a, b, c) = ax^2 + cx - b$.

(a) Demuestre, si es posible, que f es un homomorfismo

(b) Demuestre, si es posible, que g es un isomorfismo

(c) Demuestre que $g^{-1} \circ f$ no es sobreyectiva

(9) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} + 3a_{21} & a_{12} - a_{21} + a_{22} \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que h es un isomorfismo de grupos

(b) Determine h^{-1}

(10) Sea $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_1 - 3a_2, a_0 + a_2, a_1 - 3a_2)$

(a) ¿Es h un isomorfismo?

(b) Si su respuesta es afirmativa exhiba h^{-1}

(11) Sea $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ un homomorfismo. Demuestre que h no es inyectiva

(12) Sea $h : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ un homomorfismo. Demuestre que h no es sobreyectiva

(13) Sea $h : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ un homomorfismo no nulo. Demuestre que si $h \circ h = 0$ entonces h no es inyectiva

(14) Demuestre que la relación de isomorfismos entre grupos es relación de equivalencia.

(15) Considere $(\mathbb{Z}, +)$ y $(2\mathbb{Z}, +)$ dos grupos con la adición habitual. Demuestre que $\mathbb{Z}$ y $2\mathbb{Z}$ son grupos isomorfos.

(16) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4) \mapsto \mathbb{R}$ tal que $T((a_{ij})) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_{ii}$

(a) Demuestre que T es un homomorfismo

(b) Demuestre que T no es inyectivo

(17) Sea $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T((x_1,\, x_2,\, x_3)) = (x_1 + x_2,\, x_2 - x_3,\, 2x_1 - x_3)$

(a) Demuestre que T es un homomorfismo biyectivo

(b) Demuestre que $T \circ T$ es también isomorfismo

(c) Determine $(T \circ T)^{-1}$

BUEN TRABAJO !!!