Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°2
Coordinador de Álgebra
Ricardo Santander Baeza
Agosto de 2008

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

Autores y Aportes

Profesores: Arancibia Luis, Carvajal Miguel, Castro Emilia, Chacón Humberto, González Luz, Muñoz Miguel, Narea Lila, Riquelme Luis, Rivera Eugenio, Riveros Luis, Santander Ricardo.

Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el fin de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente iniciar su perfeccionamiento en el arte de enfrentar con éxito la resolución de situaciones nuevas.

Ejercicios Propuestos

(1) Sean R y S dos relaciones de A en B, dos conjuntos no vacíos. Demuestre:

(a) $dom(R \cup S) = dom(R) \cup dom(S)$

(b) $rec(R) - rec(S) \subseteq rec(R - S)$

(c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

(d) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

(2) Considere las siguientes proposiciones. Determine la veracidad de cada una de ellas, demostrando si es verdadera y ejemplificando si es falsa.

(a) $R : A \to B \wedge S : B \to C \Longrightarrow dom(S \circ R) \subseteq dom(R)$

(b) $[R, T \subseteq (A \times B) \wedge S, U \subseteq (B \times C) \wedge (R \subseteq T \wedge S \subset U)] \Longrightarrow (S \circ R \subseteq U \circ T)$

(c) $[T \subseteq (A \times B) \wedge R, S \subseteq (B \times C)] \Longrightarrow (R \circ T) - S \circ T) \subseteq (R - S) \circ T$

(d) $[T : A \to B \wedge S : B \to C \wedge R : C \to D] \Longrightarrow R \circ S \circ T = (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

(3) Considere la siguiente relación, definida en un conjunto sobre si mismo

	a	b	c	d
a		**X**	**X**	
b				
c		**X**		
d	**X**		**X**	

, Representada por $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Con este tipo de representación: Determine las propiedades que verifican las siguiente relaciones

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
  (a) Muestre que la relación R dada por $xRy \iff x \cdot y$ es múltiplo de 3, no es refleja, es simétrica y no es transitiva

  (b) Muestre que la relación S dada por $xSy \iff x + y$ es múltiplo de 3, no es refleja, es simétrica y no es transitiva

  (c) Represente ambas relaciones usando matrices como las anteriores.

(5) Considere R una relación simétrica en E. Se Define una nueva relación R_1 en E por:
$aR_1b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset E : a = x_0, b = x_n \wedge \forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}(x_iRx_{i+1} \vee x_i = x_{i+1})$
Demuestre que R_1 es una relación de equivalencia.

(6) Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Sobre $\mathbb{N}^2$ si se define la relación siguiente: $(m, n)R(m_0, n_0) \Leftrightarrow n + m_0 = n_0 + m$.

  (a) Demuestre que R es relación de equivalencia en $\mathbb{N}^2$.

  (b) Determine $\overline{(m, n)}$, la clase de equivalencia de (m, n)

  (c) Si $\varphi : [\mathbb{N}^2/R] \to \mathbb{Z}$ definida por con $\varphi(\overline{(m, n)}) = n - m$. Demuestre que φ es una biyección. **Observación.** $[\mathbb{N}^2/R] = \{\overline{x} : x \in \mathbb{N}^2\}$.

(7) Si definimos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $f(x, y, z) = (x + my - z, 2mx + mz, x - my + (1 + m)z)$. Determine

  (a) $S_1 = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ es inyectiva}\}$, y

  (b) $S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ no es sobreyectiva}\}$

(8) Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ función definida por:

$$T(a, b, c) = (a + 2b + 3c)x^2 + (2a + 5b - 4c)x + (3a + 7b + 8c)$$

  (a) Determine imagen de T.

  (b) Determine si T es biyectiva. Si su respuesta es afirmativa determine T^{-1}.

(9) Determine las soluciones de las ecuaciones trigonométricas.

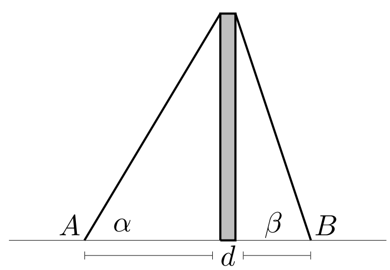
  (a) $\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x\cos x - 2\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

  (b) $\sqrt{1 + 2\operatorname{sen}x} = 2 - 3\operatorname{sen}x$

(c) $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}2x + \cos 2x = 1$

(d) $3\mathrm{tg}2x - 4\mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}^2 3x\mathrm{tg}2x$

(10) Como se muestra en la figura; dos personas que están situadas en los puntos A y B, distantes d metros entre si, observan un edificio con ángulos de elevación de α y β respectivamente.



Determine la altura del edificio, si:

(a) El ancho del edificio es de L metros.

(b) El ancho del edificio no se considera.

(11) Demuestre que la relación de isomorfismos entre grupos es relación de equivalencia.

(12) Considere $(\mathbb{Z}, +)$ y $(2\mathbb{Z}, +)$ dos grupos con la adición habitual. Demuestre que $\mathbb{Z}$ y $2\mathbb{Z}$ son grupos isomorfos.

(13) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4) \mapsto \mathbb{R}$ tal que $T((a_{ij})) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii}$

(a) Demuestre que T es un homomorfismo

(b) Demuestre que T no es inyectivo

(14) Sea $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T((x_1,\, x_2,\, x_3)) = (x_1 + x_2,\, x_2 - x_3,\, 2x_1 - x_3)$

(a) Demuestre que T es un homomorfismo biyectivo

(b) Demuestre que $T \circ T$ es también isomorfismo

(c) Determine $(T \circ T)^{-1}$

BUEN TRABAJO !!!