Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°4

Ricardo Santander Baeza

Noviembre del 2009

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el fin de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente iniciar su perfeccionamiento en el arte de enfrentar con éxito la resolución de situaciones nuevas.

2. Algunos Ejercicios Propuestos acerca de Producto Interno

(1) Sea $\mathbb{V} = \langle\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}\rangle$. Define en $\mathbb{V}$ el producto interno

$$\langle f, g\rangle \quad = \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\, dx$$

Demuestre que $\mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle,\rangle$ de dimensión n.

(a) Demuestre que $\langle u, v\rangle = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall v, v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

(b) Demuestre que $\langle u - v, w\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall w, w \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = v$

(3) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$

(a) Determine una base ortogonal de $\mathbb{W}$

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) $d((x, y, z), \mathbb{W})$

(4) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$.

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$

(5) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0 \wedge z - t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Calcule $d((1,1,0,0),W)$

(6) Sea $\mathbb{W} = \{(1,2,4,0),(0,-1,3,1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) ¿$\mathbb{R}^4 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$?

(7) Consideremos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ con el producto interno usual, es decir, $\langle A, B\rangle = tr(B^t \cdot A)$.

(a) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Si $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid tr(A) = 0\}$ entonces determine $P_{\mathbb{W}}$ y $\mathbb{W}^{\perp}$

(8) En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) \tag{1}$$

(a) Sea $\alpha = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$. Determine una base ortogonal respecto del producto interno definido en (1)

(b) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 = 0\}$. Determine $\mathbb{W}^{\perp}$ respecto del producto interno definido en (1)

(c) Es posible que $\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Si su respuesta es afirmativa demuestre la afirmación, si es falsa de un contraejemplo.

(9) Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \mid a_0 + a_1 - 3a_2 = 0\}$ entonces determine respecto de (1)

(a) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(b) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Calcule $d(1 + x + x^2, \mathbb{W})$

(10) En $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios hasta grado 2, considere el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle \quad = \quad \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)\, dx \tag{2}$$

(a) Determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en (2) a partir de la base canónica $pol(2) = \{1, x, x^2\}$

(b) Si $\mathbb{W} = \langle\{1-x\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(c) Si $\mathbb{W} = \langle\{1, 1+x\}\rangle$ entonces determine $\mathbb{P}_{\mathbb{W}}$

(11) Sea $\mathbb{V}, \langle, \rangle$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y sea $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\alpha' = \{u_1', u_2', \dots, u_n'\}$ es una base ortogonal respecto del producto interno $\langle, \rangle$ obtenida de la base α. Demuestre que

$$\alpha \text{ Base ortogonal} \iff \alpha = \alpha'$$

(12) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle, \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $P_{\mathbb{W}} \circ P_{\mathbb{W}} = P_{\mathbb{W}}$

(b) $P_{\mathbb{W}}$ es sobreyectiva

(c) $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

(d) $P_{\mathbb{W}}(w) = w \iff w \in \mathbb{W}$

(e) $u \in \mathbb{W}^{\perp} \iff P_{\mathbb{W}}(u) = 0_{\mathbb{V}}$

(13) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle, \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Demuestre que

(a) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \iff u \in \mathbb{W}$

(b) $d(u, \mathbb{W}) = 0 \iff P_{\mathbb{W}}(u) = u$

(14) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n con producto interno $\langle, \rangle$, y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ conjunto ortogonal respecto de } \langle, \rangle \quad \Longrightarrow \quad \alpha \text{ conjunto linealmente independiente en } \mathbb{V}$$

(15) Si $(V, \langle, \rangle, \mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial entonces demuestre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2$$

3. Algunos Ejercicios Propuestos acerca de Transformaciones Lineales

(1) Sea $T : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 3x + w & x - y \\ 2y - z & x - 3w \end{pmatrix}$

(a) Muestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$

(b) Determine $\ker(T)$ e $\mathrm{Img}(T)$

(c) ¿T es un isomorfismo ?

(d) Si consideramos $c(4) = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, y $m(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, la base canónica de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces calcule $\det[T]_{c(4)}^{m(2)}$

(e) Si consideramos las dos nuevas bases $\alpha = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. Determine $[T]_{\alpha}^{\beta}$

(f) Demuestre que $[T]_{c(4)}^{m(2)} = [I]_{m(2)}^{\beta}[T]_{\alpha}^{\beta}[I]_{c(4)}^{\alpha}$

(2) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Demuestre que

(a) $[T]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\beta}^{\beta}[I]_{\alpha}^{\beta}$

(b) Concluya que $\det[T]_{\alpha}^{\alpha} = \det[T]_{\beta}^{\beta}$

(3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, tal que $T(x,y,z) = (x + \mu y - z, 2\mu x + \mu z, x - \mu y + (1+\mu)z)$ entonces

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ para cada $\mu \in \mathbb{R}$

(b) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{\mu \in \mathbb{R} \mid T \text{ es isomorfismo}\}$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $\ker(T) = \langle\{(1,1,1)\}\rangle$

(b) $\text{Img} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

(5) Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que

(a) $\ker(T) = \{(1,1,1)\}$

(b) $Img(T) = \{(1,0,0),(1,1,0),(-2,-1,0)\}$

(6) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $\ker(T) = \langle\{1+x\}\rangle$

(7) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $\text{Img}(T) = \langle\{1+x\}\rangle$

(8) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que verifique simultáneamente las condiciones

(a) $\ker(T) = \{1\}$

(b) $\text{Img}(T) = \langle\{1-x, 1-x^2, x-x^2\}\rangle$

(9) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), \mathbb{R}^3)$ tal que verifique simultáneamente las condiciones

(a) $\ker(T) = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\}$

(b) T sobreyectiva

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ tal que T no nula. Demuestre que

(a) $\mathbb{V} = \{u \in \mathbb{V} \mid (T \circ T)(u) = 0_{\mathbb{V}}\} \Longrightarrow T$ no inyectiva

(b) $\mathbb{V} = \{(T \circ T)(u) \mid u \in \mathbb{V}\} \Longrightarrow T$ sobreyectiva

4. Algunos Ejercicios Propuestos acerca de Diagonalización

(1) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$, tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_0x + a_2x^2$ entonces

(a) Determine valores y vectores propios de T

(b) ¿T es un isomorfismo ?

(2) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $\det(A) \neq 0$.

- Demuestre que A diagonalizable $\Longrightarrow A^{-1}$ diagonalizable
- Si A diagonalizable. Determine los subespacios propios de A^{-1}

(3) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(A) = A^t$ entonces

(a) Determine valores propios de T

(b) ¿Es T diagonalizable?. Justifique completamente su respuesta.

(4) Determine (si es posible) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{R}_2[x])_{-1} = \langle\{1 - x\}\rangle$

(b) $(\mathbb{R}_2[x])_1 = \left\langle\left\{1 + x, x^2\right\}\right\rangle$

(5) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que $T(x, y) = (x + y, ay)$. Determine el conjunto

$$D \;=\; \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ es diagonalizable}\}$$

(6) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ c & 3 \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$S = \{c \in \mathbb{R} \mid A \text{ es diagonalizable}\}$$

(7) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_4 = \left\{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\right\}$, donde A^t es la matriz traspuesta de la matriz A.

(b) T no es un isomorfismo.

(8) Si $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(x,y) = (x-y, x+y)$ y $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que $g(x,y) = (x+2y, x-3y)$.

(a) Determine los valores propios de $T = g \circ f$, donde $(g \circ f)(u) = g(f(u))$ para $(\forall u; u \in \mathbb{R}^2)$

(b) ¿T es diagonalizable?

(9) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, tal que $T(x,y,z) = (2x-2y, 0, 2x-2y)$. Demuestre que T es diagonalizable

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Demuestre que

$$T \text{ no sobreyectiva } \Longleftrightarrow \mathbb{V}_0 \neq \{0_{\mathbb{V}}\}$$

Sabemos que están un tanto agotados por el trabajo realizado durante el año, pero el esfuerzo bien vale la pena, pues por una parte el verdadero trabajo dignifica y libera a la mujer y al hombre, y por otra parte no olviden que este entrenamiento es la preparación inicial, para que puedan realizar la labor que ustedes mismos han decidido, y que el país espera que cumplan a lo largo de toda su vida.

BUEN TRABAJO !!!