Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Guía de Ejercicios N°2
Coordinación de Álgebra
Julio del 2006

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

Profesores Autores de la Guía N°2:
Ruth Alcarraz
Miguel Carvajal
Lila Narea
Ricardo Santander
Revisado por: Luis Arancibia

Estimados estudiantes, los profesores que componen esta coordinación, les proponen estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, si es que aún no lo han hecho, sentir por una parte el placer de estudiar matemática, y por otra desarrollar competencias adecuadas que les permitan de manera eficiente:

Contenidos de la Guía Nº 2

(1) Relaciones

(2) Funciones

(3) Homomorfismos de Grupos (Isomorfismos de Grupo)

Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información (dato), de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta

(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más

(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

Ejercicios Propuestos

Relaciones

(1) En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ se define la relación:

$$aRb \Longleftrightarrow a \text{ es un factor de } b \quad (a \text{ divide } b)$$

Demuestre que R es una relación reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

(2) En $\mathbb{N}$ define la relación

$$mRn \Longleftrightarrow m + n = 10$$

¿ Es R, refleja, simétrica o transitiva ?

(3) En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Define la relación

$$aRb \Longleftrightarrow (a - b) \text{ es múltiplo de } 5.$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Determine $\overline{z} \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$

(c) Muestre que $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3} \cup \overline{4}$

(4) En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Define para $n \in \mathbb{Z}$ fijo, la relación

$$aRb \Longleftrightarrow (a - b) \text{ es múltiplo de } n.$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Determine $\overline{z} \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$

(c) Muestre que $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{i}$

(Esta relación se denota por $a \cong b \quad (mod\ n)$, y se lee a congruente a b módulo n)

(5) En el conjunto de números enteros $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación

$$(x, y)R(z, w) \Longleftrightarrow (\exists k; k \in \mathbb{Z}) : x - z = 8k \ \wedge \ y - w = 7k$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Determine $\overline{(1, 0)}$

(6) Sea $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ una función. Define en $\mathbb{Z}$, la relación

$$z_1 R z_2 \Longleftrightarrow f(z_1) = f(z_2)$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Si $f(z) = 2^z \quad (\forall z; z \in \mathbb{Z})$. Determine $\overline{z}$ para cada $z \in \mathbb{Z}$

(7) Sea $\mathbb{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$. Define en $\mathbb{R}^2$, la relación

$$uRv \Longleftrightarrow (u - v) \in \mathbb{L} \quad (\forall u; u \in \mathbb{R}^2), (\forall v; v \in \mathbb{R}^2)$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Grafique $\overline{(0, 0)}$

(8) En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Define la relación R como sigue:

$$aRb \Longleftrightarrow a^2 - b = b^2 - a$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Determine $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$.

(9) En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación

$$(a, b)R(c, d) \Longleftrightarrow ac \geq 0 \wedge bd \geq 0$$

Determine si R es una relación de equivalencia.

(10) Sea R una relación de equivalencia definida en un conjunto A. Demuestre que

- Si cRa y cRb , entonces aRb
- Si $b \in \overline{a}$, entonces $\overline{b} = \overline{a}$
- Si $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ entonces $\overline{a} = \overline{b}$

Secciones Cónicas

(1) Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $P = (1, 3)$

(2) Determine, si es posible, la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P = (1, -2)$, $Q = (4, 1)$ y $R = (2, 3)$

(3) Determine la ecuación de la recta L, que es tangente al círculo de ecuación $C : x^2 + y^2 = 25$, en el punto $P = (3, 4)$. Grafique C y L

(4) Determine, si es posible, la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P = (1, -1)$ y su centro es el punto de intersección de las rectas, $x + y + 1 = 0$ y $2x - 3y - 2 = 0$. Grafique el círculo y las rectas.

(5) Identifique las secciones cónicas y grafiquelas:

(a) $x^2 + 8x + 9y^2 + 36y + 16 = 0$

(b) $4x^2 - 24x + y^2 + 4y + 24 = 0$

(c) $9x^2 - 36x + 4y^2 - 24y + 36 = 0$

(d) $4x^2 + 4x + 4y + 13 = 0$

(e) $4y^2 + 12y + 9x = 0$

Funciones

(1) Sea $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x + 2$. Demuestre que f es inyectiva, pero no sobreyectiva.

(2) Sea $f : \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = 3x - 22$. Demuestre que f es biyectiva

(3) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x$, y $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Demuestre que

(a) $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$ (la identidad de $\mathbb{R}$)

(b) $g \circ g = 1_{\mathbb{R}}$

(c) $f \circ g = g \circ f$

(4) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 1$ y $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{2-3x}{2}$. Determine, si es posible una función $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $h \circ f = g$,

(5) Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + c$, c es un número real fijo. Demuestre que

$$f^n(x) = x + nc \ (\forall n; n \in \mathbb{N}) \qquad (\text{donde, } f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \ (n \text{ veces }) \text{ y} f^0 = 1_{\mathbb{R}})$$

(6) Considere los conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ y las funciones $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$. Demuestre que

$$g \circ f = 1_{\mathbb{A}} \Longrightarrow f \text{ inyectiva y } g \text{ sobreyectiva}$$

(7) Considere los conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ y las funciones biyectivas $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{A}$. Demuestre que

$$g = f^{-1} \Longleftrightarrow f = g^{-1}$$

(8) Considere los conjuntos $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ $\mathbb{C}$ y las funciones $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B} \longmapsto \mathbb{C}$. Demuestre que

$$f \text{ biyectiva y } g \text{ biyectiva} \Longrightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

(9) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$ y $H : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que H(x,y)=(-2y,y-2x).

(a) Pruebe que H es una biyección

(b) Pruebe que T es inyectiva

(c) Determine $T \circ H^{-1}$

(10) Sea $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$.

(a) Demuestre que h no es inyectiva

(b) ¿h es sobreyectiva?

(c) Grafique el conjunto $\mathbb{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x, y, z) = (0, 0)\}$

Grupos y Homomorfismos de Grupos

(1) En $\mathbb{Z}$ define la operación binaria

$$a * b = a + b + ab$$

¿$(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo?

(2) Sea $G = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$. Demuestre que $(G, +)$ es un grupo abeliano.

(3) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, b - c)$.

(a) Muestre que h es un homomorfismo de grupos

(b) Determine el $\ker(h)$

(c) Muestre que h es sobreyectivo

(4) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & b \\ c - b & d - a \end{pmatrix}$

(a) Demuestre que h es un isomorfismo de grupos

(b) Determine h^{-1}

(5) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & a - b \\ c - b & d - a \end{pmatrix}$

(a) Demuestre que h no es un isomorfismo de grupos

(b) Determine Img(h)

(6) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^4$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b, b, c - b, d - a)$

(a) Demuestre que h es un isomorfismo de grupos

(b) Determine h^{-1}

(7) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^4$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b, b - a, c - b, d - a)$

(a) Demuestre que h no es un isomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(h)$

(8) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1, a_0 - a_1, a_1)$

(a) Demuestre que T es un homomorfismo de grupos

(b) Determine $\ker(T)$

(c) Grafique $\mathrm{Img}(T)$

(9) Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_2 - \lambda a_1x + a_0x^2$. Determine el conjunto

$$I = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo de grupos}\}$$

(10) Sea $(\mathbb{G}, +)$ un grupo abeliano y $h : \mathbb{G} \longmapsto \mathbb{G}$ un homomorfismo de grupos tal que

(a) $h \neq 0$ (no es el homomorfismo nulo)

(b) $h \neq 1_{\mathbb{G}}$ (no es el homomorfismo identidad)

(c) $h \circ h = h$

Demuestre que h no es un isomorfismo

BUEN TRABAJO !!!