Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación
Prof. Gabriel Rabanales R.

Guía de ejercicios
Inducción matemática 2

1. Usando inducción matemática demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas para todo número natural “n”:

   (1) P(n): $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)(2i-1)} = \frac{n}{2n+1}$

   (2) P(n): $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = 1 + (n-1)2^n$

   (3) P(n): $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

   (4) P(n): $(1 + +2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots. + n^3$

   (5) P(n): $(n^3 - n)$ es divisible por 3

   (6) P(n): $(n^3 + 2n)$ es divisible por 3

   (7) P(n): $(6^{n+1} + 4)$ es divisible por 5

   (8) P(n): $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13

2. Usando inducción matemática demuestre que:

   (1) P(n): $2 + 8 + 26 + \ldots + (3^n - 1) = \frac{3(3^n - 1) - 2n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (2) P(n): $\left(2 + \frac{1}{2}\right) + \left(4 + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right) = 2^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (3) P(n): $1 \cdot (5) + 2 \cdot (5^2) + 3 \cdot (5^3) + \ldots + n \cdot (5^n) = \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (4) P(n): $n^2(n+1)^2$ es divisible por 4 $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (5) P(n): $(2^n + 1)$ es divisible por 3, $\quad n \in \mathbb{N}$ y n es impar

   (6) P(n): $1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \ldots + nr^{n-1} = \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (7) P(n): $n(n^2 - 1)$ es divisible por 24 $\quad n \in \mathbb{N}$, donde n es impar

3. Demuestre mediante inducción matemática las siguientes proposiciones:

   (1) P(n): $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1} \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (2) P(n): $1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+..+n\cdot 3^{n-1}=\frac{(2n-1)3^n+1}{4} \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (3) P(n): $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1} \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (4) P(n): $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+....+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)} \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

4. Usando inducción matemática demuestre las siguientes proposiciones:

   (1) P(n): $n<2^n \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (2) P(n): $3^n\geq 2n+1 \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (3) P(n): $2n\leq 2^n \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (4) P(n): $2n<n^2+2 \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (5) P(n): $2^n+257>n^3 \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

   (6) P(n): $2^{3^n}>3^{2^n} \qquad n\in \mathbb{N}\wedge n>1$

5. Sea $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida por recurrencia tal que: $u_1=0$ y $u_{k+1}=\left(1+x\right)\cdot u_k-kx$, $x\in \mathbb{R}^+$

   Demuestre por inducción que: $u_n=\frac{1}{x}\left(1+nx-\left(1+x\right)^n\right) \qquad \forall n\in \mathbb{N}$

6. Sea $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida por recurrencia tal que: $u_1=1,\ u_2=2,\ u_n=u_1\cdot u_2\cdots u_{n-1},\ n\geq 3$

   (a) Calcular u_3 y u_4

   (b) Demuestre que a partir de n = 3: $u_n=2^{\left(2^{n-3}\right)}$

7. Sea $(a_n)_{n\in N}$ tal que: $a_1=2$ y $a_n=3a_{n-1}$ para todo $n>1$. Demuestre por inducción que:

   $a_n=2\cdot 3^{n-1}$ para todo natural $n>1$

8. Sea $(a_n)_{n\in N}$ tal que: $a_1=2$ y $a_n=a_{n-1}^{-1}$ para todo $n>1$. Demuestre por inducción que:

$a_n = \dfrac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^{n}}$ para todo natural $n > 1$