Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación
Prof. Gabriel Rabanales R.

GUIA DE EJERCICIOS
NUMEROS NATURALES

SUMATORIAS
EJERCICIOS RESUELTOS:
Calcular:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} (3k^2 + 2k - 5)$

b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{40} \left[(k+1)^3 + 3(k-5)^2 - 3^{5-k}\right]$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} \left(\sum_{j=1}^{10} (i^2 \cdot j + 2^i \cdot 2^{3j}) \right)$

d) el valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ si se sabe que: $\displaystyle\frac{1}{21}\sum_{k=1}^{20}\left(k \cdot n\right) = 500$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$ en función de *n*.

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{80} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \right)$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[(k^2+1) \cdot k!\right]$

Soluciones:

a) $$\sum_{k=1}^{50} (3k^2 + 2k - 5) = 3\sum_{k=1}^{50} k^2 + 2\sum_{k=1}^{50} k - \sum_{k=1}^{50} 5 = 3 \cdot \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} + 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 5 \cdot 50 = 131.075$$

b) $$\sum_{k=10}^{40} \left[(k+1)^3 + 3(k-5)^2 - 3^{5-k} \right] = \sum_{k=10}^{40} (k+1)^3 + 3\sum_{k=10}^{40} (k-5)^2 - \sum_{k=10}^{40} 3^{5-k}$$

$$= \sum_{k=11}^{41} k^3 + 3\sum_{k=5}^{35} k^2 - \sum_{k=10}^{40} 3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{41} k^3 - \sum_{k=1}^{10} k^3 + 3\left(\sum_{k=1}^{35} k^2 - \sum_{k=1}^{4} k^2 \right) + 3^5\left(\sum_{k=1}^{40} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right)$$

$$= \frac{41^2 \cdot 42^2}{4} - \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} + 3 \cdot \left(\frac{35 \cdot 36 \cdot 71}{6} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} \right) + 3^5 \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{40} - 1}{3\left(\frac{1}{3} - 1\right)} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{9} - 1}{3\left(\frac{1}{3} - 1\right)} \right)$$

c) $$\sum_{i=1}^{15}\left(\sum_{j=1}^{10}(i^2\cdot j+2^{i+3j})\right)=\sum_{i=1}^{15}\left(\sum_{j=1}^{10}(i^2\cdot j+2^{i}\cdot 2^{3j})\right)=\sum_{i=1}^{15}\left(i^2\sum_{j=1}^{10}j+2^i\sum_{j=1}^{10}8^j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{15}\left(i^2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+2^i\cdot 8\cdot\frac{8^{10}-1}{8-1}\right)=\frac{10\cdot 11}{2}\cdot\frac{15\cdot 16\cdot 31}{6}+8\cdot\frac{8^{10}-1}{8-1}\cdot 2\cdot\frac{2^{15}-1}{2-1}$$

d) $$\frac{1}{21}\cdot\sum_{k=1}^{20}(n\cdot k)=500\Leftrightarrow\frac{1}{21}\cdot n\sum_{i=1}^{20}k=500\Leftrightarrow\frac{1}{21}\cdot n\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=500\Rightarrow n=50$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{50}k^3=\frac{50^2\cdot 51^2}{4}.$$

e) $$\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)\cdot k!-k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)!-k!\right]=(n+1)!-1$$

(Telescópica)

f) $$\sum_{k=1}^{80}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)=\sum_{k=1}^{80}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\right)$$

$$=\sum_{K=1}^{80}\left[\frac{\sqrt{K+1}-\sqrt{K}}{\left(\sqrt{K+1}\right)^2-\left(\sqrt{K}\right)^2}\right]=\sum_{K=1}^{80}\left(\frac{\sqrt{K+1}-\sqrt{K}}{K+1-K}\right)$$

$$=\sum_{K=1}^{80}\left(\sqrt{K+1}-\sqrt{K}\right)=\sqrt{80+1}-\sqrt{1}=8$$ (Telescópica)

g) $$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2+1\right)k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2-1+2\right)k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k^2-1\right)k!+2k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)(k+1)!+2k!\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-(k+1)!+2k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-k!(k+1)+2k!\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-k!(k+1-2)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-k!(k-1)\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)!-(k-1)k!\right]=n(n+1)!-(1-1)1!=n(n+1)!$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

a) Calcular $\sum_{k=15}^{40}\left[(k-14)^3+3\cdot 2^{5-k}+2(k-5)^2\right]$

b) Calcular $\sum_{i=1}^{n}\left[2^{-2i}+(i+2)^3-n\right]$ en función de n

c) Calcular $\sum_{k=0}^{n}\left[k\sum_{i=0}^{k}2^{i}\right]$ en función de n

c) Calcular $\sum_{k=1}^{n} k$ en función de n (indicación : considerar la identidad $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ y aplicar telescópica).

e) Calcular $\sum_{k=1}^{n}(ka^{k})$ en función de n y a $(a \neq 1)$

f) Calcular $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$

g) Calcular $\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}$ en función de n

PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA
PROBLEMAS RESUELTOS.

a) Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solución : pdq para n=1: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1^3 = 1$

Pdq $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

En efecto :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$ QED.

b) Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solución: pdq para n= 1: $\sum_{k=1}^{1} kk! = (1+1)! - 1$

$1 \cdot 1! = 2! - 1$

$1 = 1$

Pdq $\quad \sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1 \Rightarrow \sum_{K=1}^{n+1} kk! = (n+2)! - 1$

En efecto:

$$\sum_{k=1}^{n+1} kk! = \sum_{k=1}^{n} kk! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)!\left[1 + (n+1)\right] - 1$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$ QED.

c) Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solución: pdq para n = 1: $\sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} = 2^1 - 1 \Rightarrow \binom{1}{1} = 1 \Rightarrow 1 = 1$

Pdq: $\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - 1$

En efecto:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] + 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{0} - \binom{n}{n} + 1 = 2^n - 1 + 2^n - 1 + 1 - 1 + 1$$

$$= 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

QED.

d) Sea el conjunto $\{a_k / k \in \mathbb{N}\}$ definido recursivamente por $a_1 = \frac{3}{4};\ a_{i+1} = \frac{3}{4 - a_i}$.

Demostrar que $a_n = \frac{3^{n+1} - 3}{3^{n+1} - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Solución: Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{3^{1+1} - 3}{3^{1+1} - 1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Por demostrar que: $a_n = \frac{3^{n+1} - 3}{3^{n+1} - 1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 3}{3^{n+2} - 1}$

En efecto:

$$a_{n+1} = \frac{3}{4 - a_n} = \frac{3}{4 - \frac{3^{n+1} - 3}{3^{n+1} - 1}} = \frac{3}{\frac{4(3^{n+1} - 1) - (3^{n+1} - 3)}{3^{n+1} - 1}} = \frac{3}{\frac{3 \cdot 3^{n+1} - 1}{3^{n+1} - 1}} = \frac{3}{\frac{3^{n+2} - 1}{3^{n+1} - 1}}$$

$$= \frac{3(3^{n+1}-1)}{3^{n+2}-1} = \frac{3^{n+2}-3}{3^{n+2}-1}$$. QED.

e) Demostrar que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solución: Para $n = 1$, pd $\displaystyle\sum_{k=1+1}^{2\cdot 1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2\cdot 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$$\frac{1}{2} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$ es verdadero

Pdq: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \Rightarrow \sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

En efecto : $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

H.I.

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$ qed.

f) Demostrar que $2^{4n}-1$ es divisible por 15 $\forall n \in IN$

Solución : Para $n = 1$ $2^{4\cdot 1}-1$ es divisible por 15

$16-1$ es divisible por 15

15 es divisible por 15

Pdq: $\left(2^{4n}-1\right)$ es divisible por 15 $\Rightarrow$ $2^{4(n+1)}$ es divisible por 15

En efecto: $2^{4(n+1)}-1 = 2^{4n+4}-1 = 2^{4n}\cdot 2^4 - 1 = 2^{4n}\cdot 16 - 1 = 2^{4n}(15+1)-1$

$= 15\cdot 2^{4n} + 2^{4n} - 1$

Divisible por 15 Divisible por 15 por hipótesis de inducción. QED

PROBLEMAS PROPUESTOS.

Demostrar por inducción :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1} \quad \forall n\in \mathbb{N}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!=n(n+1) \quad \forall n\in \mathbb{N}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n\in \mathbb{N}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=\frac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1) \quad \forall n\in \mathbb{N}$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \quad \forall n\in \mathbb{N}$

f) $\displaystyle(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}x^k\right] \quad \forall n\in \mathbb{N},\, x\in \mathbb{R}$

g) $\displaystyle\frac{x^n-y^n}{x-y}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(x^{n-1-k}\cdot y^k\right) \quad \forall n\in \mathbb{N}, \quad x,y\in \mathbb{R}, \quad x\neq y$

h) Si $u_0=0$ y $u_{k+1}=(1-a)u_k+ka \quad \forall k\in \mathbb{N}\cup\{0\}, a\neq 1$

entonces $\displaystyle u_n=\frac{1}{a}\left[na-1+(1-a)^n\right] \quad \forall n\in \mathbb{N}$

i) $10^{n+2}+4\cdot 10^n+4$ es divisible por 9 $\forall n\in \mathbb{N}$

TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON.
PROBLEMAS RESUELTOS.

a) En el desarrollo de $\left(3x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, determine:

i) El cuarto término.

ii) El coeficiente de x^{10}.

iii) El término independiente de x.

Solución:

i) $\displaystyle\left(3x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3x^2)^{20-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$

Se tiene, $t_{k+1}=\dbinom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$ representa un término cualquiera del desarrollo. Luego, el cuarto término, t_4 se obtiene para $k=3$. Luego $t_4=\dbinom{20}{3}3^{17}\cdot 2^3\cdot x^{\frac{65}{2}}$.

ii) El coeficiente de x^{10} es $\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^{k}$ para un valor de k, tal que $40-\frac{5}{2}k=10 \Rightarrow k=12$.

$\therefore$ El coeficiente de x^{10} es $\binom{20}{12}3^{8}\cdot 2^{12}$.

iii) El término independiente de x es $\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^{k}$ para un valor de k tal que $40-\frac{5}{2}k=0 \Rightarrow k=16$. $\therefore$ El término independiente de x es $t_{17}=\binom{20}{16}3^{4}\cdot 2^{16}$.

b) En el desarrollo de $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^{n}$, encontrar el término independiente de x, si se sabe que el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades.

Solución:

$$\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{3/2})^{n-k}\cdot(x^{-4})^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{\frac{3}{2}n-\frac{11}{2}k}$$

Coeficiente tercer término: $\binom{n}{2}$; Coeficiente segundo término: $\binom{n}{1}$

$$\Rightarrow \binom{n}{2}=\binom{n}{1}+44 \Leftrightarrow \frac{n^2-n}{2}=n+44 \Leftrightarrow n^2-3n-88=0 \Rightarrow n=11 \vee n=-8$$

Como $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=11$. Luego $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^{n}=\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^{11}=\displaystyle\sum_{k=o}^{11}\binom{11}{k}\cdot x^{\frac{33}{2}-\frac{11}{2}k}$

El término independiente de x es $\binom{11}{k}$ donde k es tal que $\dfrac{33}{2}-\dfrac{11}{2}k=0 \Leftrightarrow k=3$.

Finalmente el término independiente de x es $t_4=\dfrac{11!}{3!\cdot 8!}=\dfrac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8!}=165$.

c) Determinar el valor de n para que los quintos términos de $\left(a+\dfrac{1}{a^3}\right)^{4n}$ y $\left(a^2+\dfrac{1}{a^4}\right)^{4n}$ sean iguales.

Solución:

$$\left(a+\frac{1}{a^3}\right)^{4n}=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{4n-k}\cdot\left(a^{-3}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{4n-4k}$$

$$\left(a^2+\frac{1}{a^4}\right)^{4n}=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot\left(a^{2}\right)^{4n-k}\cdot\left(a^{-4}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{8n-6k}$$

El quinto término de $\left(a+\dfrac{1}{a^3}\right)^{4n}$ es $\binom{4n}{4}\cdot a^{4n-16}$

El quinto término de $\left(a^2 + \frac{1}{a^4}\right)^{4n}$ es $\binom{4n}{4} \cdot a^{8n-24}$

Luego $\binom{4n}{4} \cdot a^{4n-16} = \binom{4n}{4} \cdot a^{8n-24} \Leftrightarrow a^{4n-16} = a^{8n-24} \Rightarrow n = 2$.

d) Demostrar que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad n \in \mathbb{N}$

Solución:

Teorema de Binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot a^k$. Si $a = b = 1$:

$$\Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \therefore\ 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \text{ QED.}$$

e) En el desarrollo de $\left(ax + \frac{1}{bx^2}\right)^n$, determine la condición que debe cumplir n para que exista el término independiente de x.

Solución:

$$\left(ax + \frac{1}{bx^2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (ax)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{bx^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^{-k} \cdot x^{n-3k}$$

El término independiente de x se obtiene para aquel valor de k tal que $n - 3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{n}{3}$.

Como $k = 1,2,3,..........$, la condición sobre n es que n debe ser múltiplo de 3.

f) Determinar el coeficiente de x^{19} en el desarrollo de $(1+2x)\cdot(1-x^3)^9$

Solución:

$$(1+2x)(1-x^3)^9 = (1+2x)\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \cdot 1^{9-k}(-x^3)^k = (1+2x)\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k}(-1)^k x^{3k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k}(-1)^k x^{3k}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{9} 2\binom{9}{k}(-1)^k x^{3k+1}}$$

$$3k = 19 \Leftrightarrow k = \frac{19}{3} \notin \mathbb{N} \qquad 3k+1 = 19 \Leftrightarrow k = 6$$

Luego, el coeficiente de x^{19} es $2\binom{9}{6}(-1)^6 = 168$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Verifique si se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} = \binom{n+2}{k}$

b) $\binom{n+3}{k} - 3\binom{n+2}{k} + 3\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-3}$

2.- En cada caso, encuentre el valor de n que satisface la condición dada.

a) $\binom{n}{2} = 55$

b) $\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

c) $2\binom{n}{5} = \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$

d) $\dfrac{\binom{n}{5} - \binom{n}{4}}{\binom{n}{5} + \binom{n}{4}} = \dfrac{1}{2}$

3.- Desarrolle:

a) $(a-b)^7$

b) $(2x + y^2)^3$

c) $\left(5x - y^{1/2}\right)^5$

d) $\left(x^{-1} + 2y^{-1}\right)^6$

4.- Determine:

a) El cuarto término de: $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^6$

b) El término central de: $\left(\dfrac{3}{a} + a\right)^6$

c) Los términos centrales de: $\left(6x^2 - \dfrac{1}{3x^3}\right)^{15}$

d) El término central en: $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n}$

5.- Determine el término independiente de x en el desarrollo de:

a) $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^9$

b) $(x+1)\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$

c) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n}$

6.- Determine:

a) El coeficiente de x^{18} en el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{3a}{x}\right)^{15}$

b) El coeficiente de x^{30} en el desarrollo de $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^3}\right)^{18}$

c) El coeficiente de x^{38} en el desarrollo de $\left(x^2 - \frac{1}{2x} \right)^{25}$

d) El coeficiente de x^{17} en el desarrollo de $\left(5x^2 + \frac{1}{3x} \right)^{34}$

e) El coeficiente del término que está en la posición 28 en el desarrollo de:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x} \right)^{52}$$

PROGRESIONES ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

1.- Determine:
a) a_{11} y S_{11} en la P.A. 2, 6, 10, ...
b) a_9 y S_7 en la P.A. –3, -1, 1, ...
c) a_{24} y S_{15} en la P.A. $3, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, ...$

2.- El cuarto término de un P.A. es 21 y el décimo es 48. Calcule la diferencia y el tercer término.

3.- La suma de tres números de una P.A. es 21 y el producto del primero por el tercero es 33 ¿Cuáles son los números?

4.- ¿Cuántos términos de P.A. 6, 10, 14, ... deben considerarse para que sumen 1920?

5.- Determine tres números de una P.A. tales que su suma sea 27 y su producto 288

6.- Determine k de modo que 8k + 4, 6k – 2, 2k – 7 estén en P.A.

7.- Determine:

a) a_6 y S_7 en la P.G. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, ...$

b) a_{10} y S_{10} en la P.G. 2, 4, 6,....

c) a_5 y S_6 en la P.G. $2, \frac{-2}{3}, \frac{2}{9}, ...$

8.- En una P.G. dados r = 2 y S_7 = 635, Calcule a_1 y a_7

9.- El tercer término de una P.G. es 3 y el séptimo término es $\frac{3}{16}$, calcule la razón y el primer término de dicha P.G.

10.- Calcule la suma de los 2n primeros términos de la P.G. $3, -4, \frac{16}{3} .....$

11.- Una persona arrienda una pieza en una pensión durante el año 1989. Acuerda con la dueña reajustar la renta mes a mes en una cantidad fija. El arrendatario calcula que deberá pagar $105.840 anuales y que en el mes de diciembre deberá cancelar $13.440.

a) ¿Cuál fue la renta de Enero?

b) ¿Cuál es el monto del reajuste acordado?

12.-Un individuo conviene en pagar una deuda de $36.000 en 40 pagos parciales anuales que forman una P.A. Cuando 30 de los pagos están cubiertos, el duedor fallece dejando una tercera parte de la deuda sin cancelar. Calcule el valor del primer pago.

13.-A un empleado una empresa A le ofrece una renta de $120.000 anuales con un aumento de $3.000 anuales, por un periodo de 15 años. Otra empresa B, por el mismo periodo de tiempo, le ofrece $140.000 y anuales un aumento de $2.000 por año ¿Cuál ofrecimiento es más conveniente para el empleado?

14.- Un cuerpo al caer recorre 4 metros en el primer segundo. Si en cada segundo la distancia recorrida aumenta en 1,6 veces, de que altura cae este cuerpo se demoró 10 segundos en tocar el suelo

15.-Una pelota de hule cae de una altura de 20 metros y rebota ascendiendo cada vez hasta una cuarta parte del ascenso anterior. Calcular la distancia total recorrida por la pelota cuando pega en el suelo por sexta vez.