Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Prueba acumulativa semestral de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
14 de Agosto del 2004

(1) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula proposicional

$$\mathrm{F}(n):\ (n \in \mathbb{N} : n \text{ impar }) \Longrightarrow n(n^2-1) \text{ es divisible por 24. Es verdadera.}$$

(2.a) Sea $A = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

(a) A es una progresión aritmética.

(b) $a+b \neq 0$, $a-b \neq 0$,$a+c \neq 0$ y $a-c \neq 0$

Demuestre que

$$\frac{a(a-c)}{(a-b)(a+c)} = 1$$

(2.b) Considere el desarrollo binomial

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^4} \right)^m \qquad (m \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Si existe un término en $(*)$ que contiene a x^{-6t}, para algún $t \in \mathbb{N}$ entonces demuestre que m debe ser un múltiplo de 3.

(3) Considere el homomorfismo de grupos $h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x, y, z) = (x+y+z, x-y-z)$.

(a) Determine $ker(h)$

(b) Define en $\mathbb{R}^3$ la relación $\Re$ como sigue: Para $u = (x, y, z)$ y $u' = (x', y', z')$ diremos que

$$u \Re u' \Longleftrightarrow (u-u') = (x-x', y-y', z-z') \in ker(h)$$

Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

(4) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{21}x + a_{12}x^2 + a_{22}x^3$.

(a) Demuestre que h es un Isomorfismo de grupos.

(b) Determine h^{-1}

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'