Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Examen 1[1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
16 de enero del 2004

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 3 & 4 \\ \lambda^2 & 4 & 9 & 16 \\ \lambda^3 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$. Determine $N = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$

Solución

(a) $\lambda \in N \Longleftrightarrow A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \Longleftrightarrow \det(A) = 0$

(b) Ahora calculando el determinante obtenemos que: $\det(A) = 0 \Longrightarrow N = \{2, 3, 4\}$

(2) Sea $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función}\}$. Dados los siguientes conjuntos.

(a) $\mathbb{W}_1 = \{f \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid 2f(0) = f(1)\}$

(b) $\mathbb{W}_2 = \{f \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid 2 + f(0) = f(1)\}$

Determine si $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ son subespacios de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. En caso afirmativo demuestrelo y en caso contrario explique porque no es (son) subespacios.

Solución (a)

$\mathbb{W}_1$ es un subespacio, pues

- Si $f \in \mathbb{W}_1$ y $g \in \mathbb{W}_1$ entonces $2f(0) = f(1)$ y $2g(0) = g(1)$. Luego,

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 120 minutos

$$
\begin{aligned}
(f+g) \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \wedge 2(f+g)(0) &= 2[f(0)+g(0)] \\
&= 2f(0)+2g(0) \\
&= f(1)+g(1) \\
&= (f+g)(1)
\end{aligned}
$$

Así que $(f+g) \in \mathbb{W}_1$

- Si $f \in \mathbb{W}_1$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$
\begin{aligned}
(\lambda f) \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \wedge 2(\lambda f)(0) &= 2[\lambda f(0)] \\
&= \lambda(2f(0)) \\
&= \lambda(f(1)) \\
&= (\lambda f)(1)
\end{aligned}
$$

Así que $(\lambda f) \in \mathbb{W}_1$

Solución (b)

$\mathbb{W}_2$ no es un subespacio pues, la función cero$=(0) \notin \mathbb{W}_2$.

En efecto

$2+0(0)=2+0=2 \neq 0(1)=0$

(3) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$

(a) Demuestre que.

T sobreyectiva $\Longrightarrow \beta = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathbb{V}$

Solución

- $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ y T sobreyectiva entonces es un isomorfismo (Teorema de la dimensión).
- Para demostrar que β es base basta demostrar que β es L.i. o que genera $\mathbb{V}$, pues $\dim \mathbb{V} = n$. Mostremos que es L.i.

$$\begin{aligned}
a_1T(v_1)+a_2T(v_2)+\cdots+a_nT(v_n)=0 &\implies T(a_1v_1)+T(a_2v_2)+\cdots+T(a_nv_n)=0\\
&\implies T(a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n)=0\\
&\implies (a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n)\in \ker(T) \overset{T\text{ Iso}}{=} \{0_{\mathbb{V}}\}\\
&\implies (a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n)=0_{\mathbb{V}}\\
&\overset{\alpha\text{ L.i}}{\implies} a_1=a_2=\cdots=a_n=0
\end{aligned}$$

Luego, β L.i. y entonces base de $\mathbb{V}$.

(b) Determine $[T]_\alpha^\beta$

Solución

$$\begin{aligned}
[T]_\alpha^\beta &= (\ [T(v_1)]_\beta\ [T(v_2)]_\beta\ \dots [T(v_n)]_\beta\ ) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\\
&= I_n
\end{aligned}$$

(4) Determine $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $(\mathbb{R}_2[x])_{-1} = \langle\{1,(1+x)\}\rangle$ y T sea un isomorfismo.

Solución

Etapa 1. Deseamos saber $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=?$

Etapa 2. Datos

$$\begin{aligned}
1\in(\mathbb{R}_2[x])_{-1} &\iff T(1)=-1\\
1+x\in(\mathbb{R}_2[x])_{-1} &\iff T(1+x)=-1-x
\end{aligned}$$

Y T es un isomorfismo.

Etapa 3. $\alpha=\{1,1+x,x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

En efecto

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(1+x) + a_2x^2 = 0 &\implies a_0 + a_1 + a_1x + a_2x^2 = 0 \\ &\implies a_0 + a_1 = 0 \wedge a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \end{aligned}$$

Luego α es L.i. y como $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ entonces es una base.

Etapa 4. Finalmente

- Define $T(x^2) = x^2$
- Determinemos las coordenadas de $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ en la base α.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = b_0 + b_1(1+x) + b_2x^2 \iff a_0 + a_1x + a_2x^2 = b_0 + b_1 + b_1x + b_2x^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} b_0 + b_1 & = & a_0 \\ b_1 & = & a_1 \\ b_2 & = & a_2 \end{array}\right| \implies b_0 = (a_0 - a_1) \wedge b_1 = a_1 \wedge b_2 = a_2$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1x + a_2x^2 & = & (a_0 - a_1)\cdot 1 + a_1(1+x) + a_2x^2 \\ & \Downarrow & \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) & = & T((a_0 - a_1)\cdot 1 + a_1(1+x) + a_2x^2) \\ & = & (a_0 - a_1)T(1) + a_1T(1+x) + a_2T(x^2)) \\ & = & (a_0 - a_1)(-1) + a_1(-1-x) + a_2x^2) \\ & = & -a_0 - a_1x + a_2x^2 \end{array}$$

Como T lleva base en base entonces es un isomorfismo