Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Pauta Examen 2 de Álgebra
05 de marzo del 2003

(1) Si $(1+2x)(1+x^2)^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ y si a_0, a_1, a_2, están en Progresión Geométrica, demuestre que necesariamente $n = 4$

En efecto

$$\begin{aligned}(1+2x)(1+x^2)^n &= (1+2x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k} + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k+1}\end{aligned}$$

Ahora, en el desarrollo el término constante es a_0, el coeficiente de x es a_1, etc.

Así que para obtener a_0, hacemos $k = 0$ en la primera sumatoria, y en tal caso obtenemos que:

$$a_0 = \binom{n}{0} = 1$$

Para a_1 hacemos $k = 0$ en la segunda sumatoria y obtenemos:

$$a_1 = 2\binom{n}{0} = 2$$

Para a_2 hacemos $k = 1$ en la primera sumatoria y obtenemos:

$$a_2 = \binom{n}{1} = n$$

Como $\{a_0, a_1, a_2\}$ están en progresión geométrica entonces tenemos que debe cumplirse la relación:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}$$

Es decir,

$$\frac{2}{1} = \frac{n}{2}$$

De donde sigue que $n = 4$

(2) Sea $W = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$. Se define la función $T : \mathbb{R} \longmapsto W$ como:

$$T(u,v,w) = \begin{pmatrix} u & 3w \\ 3w & 2v \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que $W \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

(b) Demuestre que T es un isomorfismo de espacios vectoriales

(c) Determine T^{-1}

- Primero mostremos que $W \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

$$\begin{aligned}
A \in W &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t \\
&\iff A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}^t \\
&\iff v = w \\
&\iff A = \begin{pmatrix} u & w \\ w & x \end{pmatrix} \\
&\iff A = u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que:

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

- T es una transformación lineal.

$$\begin{aligned}
T(u,v,w) + (u_0,v_0,w_0) &= T(u+u_0, v+v_0, w+w_0) \\
&= \begin{pmatrix} u+u_0 & 3(w+w_0) \\ 3(w+w_0) & 2(v+v_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u & 3w \\ 3w & 2v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 & 3w_0 \\ 3w_0 & 2v_0 \end{pmatrix} \\
&= T(u,v,w) + T(u_0,v_0,w_0)
\end{aligned}$$

- Finalmente,

$$\begin{aligned} T(\lambda(u,v,w)) &= T(\lambda u, \lambda v, \lambda w) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u & 3\lambda w \\ 3\lambda w & 2\lambda v \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} u & 3w \\ 3w & 2v \end{pmatrix} \\ &= \lambda T(u,v,w) \end{aligned}$$

- Calculemos el núcleo de T

$$\begin{aligned} z \in \ker(T) &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^3 \wedge T(z) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\ &\Leftrightarrow z = (u,v,w) \wedge T(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow z = (u,v,w) \wedge \begin{pmatrix} u & 3w \\ 3w & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow z = (0,0,0) \end{aligned}$$

Luego, T es inyectiva

- Ahora para la sobreyectividad tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Longrightarrow T(a, \frac{c}{2}, \frac{b}{3}) = A$$

- Además de lo anterior sigue que: $T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (a, \frac{c}{2}, \frac{b}{3})$

(3) Considere:
$\alpha = \{(1,0)(1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y

$\beta = \{(1,1,1)(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$

Determine $T \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Solución.

Si $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $v = (x-y)(1,0) + y(0,1)$, luego.

$$[v]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} (x-y) \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x-y \\ 4x-6y \end{pmatrix} = [T(v)]_{\circ beta}$$

Así que

$T(v) = (x - y)(1,1,1) + (2x - y)(1,1,0) + (4x - 6y)(-1,0,0)$

De donde $T(x,y) = (-x + 4y, 3x - 2y, x - y)$

(4) Sea $T \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T(A) = A - A^t$

- Determinemos Valores propios de T.

  Si $m(2)$ es la base canónica de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$[T]_{m(2)}^{m(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Así que el polinomio característico es $P_T(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 2)$ y los valores propios son $\{0, 2\}$

- Para decidir si T es diagonalizable.
  Evaluamos el polinomio $m_T(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$ en la matriz [T] y obtenemos que $m_T(A) = (0)$

  así que T es diagonalizable.