Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Pauta Examen de Álgebra
20 de Diciembre del 2002

(1) Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula:

$$\text{F(n):} \qquad A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \left[\frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\right] \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \text{ Es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución:

$$\text{Sea } F(1): \qquad A = \begin{pmatrix} a & a^{1-1} & \left[\frac{1(1-1)}{2}\, a^{1-2}\right] \\ 0 & a & a^{1-1} \\ 0 & 0 & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es claro que $F(1)$es verdadera.

Suponer verdadera $F(n)$ por demostar $F(n+1)$.

$$F(n+1) =: \qquad A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & \left[\frac{n(n+1)}{2}\, a^{n-1}\right] \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Como :

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \left[\frac{n(n-1)}{2}\, a^{n-2}\right] \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & \left[\frac{n(n+1)}{2}\, a^{n-1}\right] \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

(aqui el alumno debe resolver el producto.)

De lo anterior se tiene que : $F(n+1)$es verdadera y por tanto $\forall n \in \mathbb{N}, F(n)$ es verdadera.

(2) Sea $\alpha = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\} \subset \mathbb{R}_3[x]$

- Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}_3[x]$

  Solución:

  Considere

  $a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 = 0$

  $\longrightarrow (a-b+c-d) + (b-2c+3d)x + (c-3d)x^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

  $\longrightarrow a = b = c = d = 0$

  Luego el conjunto es l.i y como la $dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$ y son 4 vectores l.i entonces es base de $\mathbb{R}_3[x]$.

- Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_3[x]$ entonces determine $[p(x)]_\alpha$

  Solución:

  Es claro que:
  $a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 1 + (a_1 + 2a_2)(x-1) + a_2(x-1)^2 + 0(x-1)^3$

$$\text{lo que implica que :}[p(x)]_\alpha = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Considere $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ y $H \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } H(1,0) = (1,2,3) \text{ y } H(1,1) = (0,0,1)$$

donde $\alpha = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $\beta = \{(1,0), (1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
Demuestre que $H \circ T \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$y decida si es un isomorfismo.

Solución:

De la matriz asociada a T se tiene:

$T(1,0,1) = (1,0) - (1,1) = (0,-1)$

$T(1,1,0) = (1,0) + 2(1,1) = (3,2)$

$T(1,1,1) = (1,0) + 0(1,1) = (1,0)$

$\forall (x,y,z)$ se tiene: $(x,y,z) = (x-y)(1,0,1) + (x-z)(1,1,0) + (y-x+z)(1,1,1)$

aplicando T nos queda:

$$T(x,y,z) = (x-y)(0,-1) + (x-z)(3,2) + (y-x+z)(1,0)$$

$\longrightarrow \; T(x,y,z) = (2x+y-2z, x+y-2z)$

Ahora $\forall (x,y)$ se tiene: $(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1)$

aplicando Hse tiene:

$$H(x,y) = (x-y)H(1,0) + yH(1,1)$$

$H(x,y) = (x-y)(1,2,3) + y(0,0,1)$

$\longrightarrow \ H(x,y) = (x-y, 2x-2y, 3x-2y)$

Ahora hallar HoT

$HoT(x,y,z) = H(T(x,y,z)) = H(2x+y-2z, x+y-2z) = (x, 2x, 4x+y-2z)$

Es muy fácil ver que HoT es una T.L.(El alumno debe demostrarlo.)

Por otro lado $ker(HoT) \neq \{0\}$ ya que por ejemplo $(0,2,1) \in ker(HoT)$ pues $HoT(0,2,1) = (0,0,0)$.

asi se tiene que HoT no es un isomorfismo.

(4) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(A) = A^t$. Demuestre que T es diagonalizable.

Solución:
Considere la base canónica de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, sea ésta $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,entonces la matriz asociada a T en la base canónica está dada por:

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde se tiene que el polinomio característico es:
$p(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+1) \longrightarrow$ los v.p son $1, -1$.

Además no es dificil ver que :

$V_1 = \{A/A$ es simétrica$\} \longrightarrow dimV_1 = 3 = ma(1)$

$V_{-1} = \{A/\ A$es antisimétrica$\} \longrightarrow dimV_{-1} = 1 = ma(-1)$

De donde se concluye que T es diagonalizable.

(Aqui el alumno puede ver que es diagonalizable mostrando que el polinomio minimal es $m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$.)