Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemáticas y C.C.

PAUTA PAS - ALGEBRA
INGENIERIA CIVIL
(agosto 2002)

(1) Sea $A \in \mathbb{M}_R(n)$ tal que $det(A) \neq 0$.
Demostrar , usando inducción , que:

$$det\left((A^{-1})^n\right) = (det(A))^{-n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

$$p(n) : det\left((A^{-1})^n\right) = (det(A))^{-n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$p(1) : det\left(A^{-1}\right) = (det(A))^{-1}$$

Es claro que $p(1)$ se cumple.

ii)Suponer verdadero $p(k) : det\left((A^{-1})^k\right) = (det(A))^{-k}$
Por demostrar $p(k+1)$

$$p(k+1) : det\left((A^{-1})^{k+1}\right) = (det(A))^{-(k+1)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} det\left((A^{-1})^{k+1}\right) &= det\left((A^{-1})^k (A^{-1})\right) \\ &= det\left((A^{-1})^k\right) det\left((A^{-1})\right) \\ &= det\,(A)^{-k}\, det\,(A)^{-1} \qquad \text{por hipótesis de ind.y prop.de determinantes} \\ &= (det(A))^{-k-1} \end{aligned}$$

Asi $p(k+1)$ se cumple , y $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadero.

(2) Sean A y B matrices de orden 3 tal que:
$det(A) = 3$, $det(B^{-1}) = -2$.
Si $H = A^{-1}\, Adj(B)\, A^4$ entonces calcule $det(H)$
Solución:

Por las propiedades de determinante se tiene:

$$
\begin{aligned}
det(H) &= det\left(A^{-1}\cdot Adj(B)\cdot A^4\right)\\
&= det(A^{-1})\cdot det(Adj(B))\cdot det(A^4)\\
&= (det(A))^{-1}\cdot det(B)^2\cdot (det(A))^4 \qquad \text{ya que } det(Adj(B)) = det(B)^{n-1}\\
&= \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^2\cdot 3^4\\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}
$$

(3) Sea $T : (G, *) \longrightarrow (G', *')$ un homomorfismo.

(a) Demuestre que si T tiene inversa por la izquierda entonces $KerT = \{e_G\}$

Demostración:

$$
\text{Sea} \quad u \in KerT \longrightarrow \begin{cases} T(u) = e_{G'} & \text{aplicando } T^{-1} \text{ por la izquierda} \\ T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(e_{G'}) & \\ u = e_G & \end{cases}
$$

(b) Demuestre que si T tiene inversa por la derecha entonces T es epiyectiva.

Demostración:

Sea $v \in G'$. $T^{-1} : (G', *') \longrightarrow (G, *) \longrightarrow T^{-1}(v) \in G$

Llamémosle $u = T^{-1}(v) \in G$, $\longrightarrow$ como T tiene inversa por la derecha $\longrightarrow$ $T(T^{-1}(v)) = v$, esto es:

$\forall v \in G', \exists u = T^{-1}(v) \in G\ ,\ T(u) = T(T^{-1}(v)) = v$

(4) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto:

$$S = \{B \in M_{\mathbb{R}}(2) \,/\, B^2 = A\}$$

Solución:

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$

$$\text{Como } B^2 = A \longrightarrow \begin{array}{l} 1)\ a^2 + bc = 3 \\ 2)\ ab + bd = -2 \\ 3)\ ac + dc = -4 \\ 4)\ bc + d^2 = 3 \end{array}$$

De 1) y 4) se tiene que :

$a^2 = d^2 \longrightarrow a = d \vee a = -d$

Si $a = d$

En 2) se tiene $ab = -1 \longrightarrow b = \frac{-1}{a}$

En 3) se tiene: $ac = -2 \longrightarrow c = \frac{-2}{a}$

Asi

$$B = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{a} \\ -\frac{2}{a} & a \end{pmatrix}$$

Volviendo a 1) y reemplazando b y c queda :

$a^2 + \frac{2}{a^2} = 3 \longrightarrow (a^2 - 2)(a^2 - 1) = 0$

$\longrightarrow a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2} \vee a = 1 \vee a = -1$

De donde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora si $a \neq d \longrightarrow$ en 2) y 3) se produce contradicción.