Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Prueba Especial Programada Nº 1 [1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
20 de Agosto del 2003

(1) Para la relación R definida en $\mathbb{Z}^+$ por

$$m\; R\; n \iff (\exists u; u \in \mathbb{Z}) : m = n \cdot 2^u$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

(b) Determine el conjunto $\bar{a}$; $(a \in \mathbb{Z}^+)$

Solución

(a) Demostremos que R es una relación de equivalencia

(i) R es una relación reflexiva.

En efecto

$m = m \cdot 1 = m \cdot 2^0 \Longrightarrow m\; R\; m \quad (\forall\, m; m \in \mathbb{Z}^+)$

Luego R es una relación refleja.

(ii) R es una relación simétrica.

En efecto

$m\; R\; n \Longleftrightarrow (\exists u; u \in \mathbb{Z}) : m = n \cdot 2^u \Longrightarrow n = m \cdot 2^{-u} \quad (-u \in \mathbb{Z})$

Luego R es una relación simétrica.

(iii) R es una relación transitiva.

En efecto

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 90 minutos

$$
\begin{aligned}
m\,R\,n \ \wedge \ n\,R\,t \ &\Longrightarrow \ (\exists u; u \in \mathbb{Z}) : m = n \cdot 2^u \wedge (\exists s; s \in \mathbb{Z}) : n = t \cdot 2^s \\
&\Longrightarrow \ (\exists u; u \in \mathbb{Z})(\exists s; s \in \mathbb{Z}) : m = t \cdot 2^s \cdot 2^u \\
&\Longrightarrow \ (\exists u; u \in \mathbb{Z})(\exists s; s \in \mathbb{Z}) : m = t \cdot 2^{s+u} \\
&\Longrightarrow \ m\,R\,t
\end{aligned}
$$

Luego, R es una relación transitiva.

(b) Determinemos $\bar{a}$

$$
\begin{aligned}
b \in \bar{a} \ &\Longleftrightarrow \ b \in \mathbb{Z}^+ \ \wedge \ b\,R\,a \\
&\Longleftrightarrow \ b \in \mathbb{Z}^+ \ \wedge b = a \cdot 2^u \\
&\Longleftrightarrow \ \bar{a} = \{a \cdot 2^u \mid u \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

(2) (a) Determine, (si existe) el término independiente de x en el desarrollo binomial

$$(2x+1)\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{(n-k)} \left(\frac{2}{x}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \, x^{-k} \\
&\Downarrow \\
(2x+1)\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n &= (2x+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \, x^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} \, x^{(-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \, x^{-k}
\end{aligned}
$$

Luego, existirá el término independiente de x si y sólo si

$$\begin{array}{c} -k+1=0 \quad \wedge \quad -k=0 \\ \Downarrow \\ k=1 \quad \wedge \quad k=0 \end{array}$$

Así que el término pedido es

$$\binom{n}{1}\cdot 2^2+\binom{n}{0}\cdot 2^0=4n+1$$

(b) Demuestre usando el teorema del binomio que:

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}=0$$

Solución

$$\begin{array}{ccc} (1-1)^n=0 & \wedge & (1-1)^n=\displaystyle\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(1)^{(n-s)}(-1)^s \\ & \Downarrow & \\ 0 & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(-1)^s \end{array}$$

(3) Si $G=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$, es una progresión geométrica que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

(a) $a_2=4$

(b) $\dfrac{a_4}{a_6}=\dfrac{25}{4}$

entonces determine la progresión G.

Solución

(a) $a_2\in G\Longrightarrow a_1\cdot r=4$

(b) $a_4\in G\wedge a_3\in G\Longrightarrow a_4=a_1\cdot r^3\wedge a_6=a_1\cdot r^5$

Luego

$$\frac{a_4}{a_6}=\frac{1}{r^2}\quad\Longrightarrow\quad r^2=\frac{4}{25}\Longrightarrow r=\pm\frac{2}{5}$$

Además como, $a_1 \cdot r = 4$ entonces $a_1 = \pm 10$. Así que las posibles progresiones son:

(i) $G = \{10, 4, \frac{8}{5}, \cdots\}$

(ii) $G = \{-10, 4, -\frac{8}{5}, \cdots\}$

(4) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula:

F(n): $n^3 - n$ es divisible por 6. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución

Etapa 1: Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

$1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$. Luego $1^3 - 1$ es divisible por 6 y entonces $F(1)$ es verdadera.

Etapa 2: Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera.

e.e.

$(\exists\, r; r \in \mathbb{R})$ tal que $n^3 - n = 6r \qquad$ (H)

Etapa 3: Tesis de Inducción. Por demostrar que $F(n+1)$, es verdadera

En efecto

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= (n^3 - n) + 3(n^2 + n) \\
&\overset{H}{=} 6 \cdot r + 3(n^2 + n) \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Basta mostrar que la fórmula $[G(n): \quad n^2 + n$ es divisible por 2] es verdadera $(\forall\, n; n \in \mathbb{N})$

En efecto

Subetapa 3.1. Por demostrar que $G(1)$ es verdadera

$1^2 + 1 = 2$ divisible por 2. Luego $G(1)$ es verdadera

Subetapa 2: Hipótesis de Inducción

$G(n)$ es verdadera, e.e. $(\exists\, q; q \in \mathbb{R}) : n^2 + n = 2q \quad (h)$

Subetapa 3: Tesis de Inducción. Por demostrar que $G(n+1)$ es verdadera

En efecto

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\
&= (n^2 + n) + 2(n+1) \\
&\stackrel{h}{=} 2q + 2(n+1) \\
&= 2(q + n + 1) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Luego $G(n+1)$ es verdadera y $G(n)$ es verdadera $(\forall\, n; n \in \mathbb{N})$.

Finalmente, sustituyendo (h) en $(*)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= 6 \cdot r + 3[2q] \qquad (*) \\
&= 6 \cdot (r + q) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Luego $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall\, n; n \in \mathbb{N})$.