Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Pauta Álgebra - PEP N° 2
24 de julio del 2002

(1) Define en $\mathbb{Q}^+$, los racionales positivos, la relación:

$$xRy \longleftrightarrow (\exists q; q \in \mathbb{Z}) : x = 7^q \cdot y$$

(i) Demuestre que R define una relación de equivalencia

demostración:

R es refleja.
$xRx \iff (\exists q; q \in \mathbb{Z}) : x = 7^q \cdot x$
de hecho:

$(\exists q = 0,\ q \in \mathbb{Z}) : x = 7^0 \cdot x$

R es simétrica.
Suponga que xRy ,entonces se cumple que:
$(\exists q; q \in \mathbb{Z}) : x = 7^q \cdot\ y \implies 7^{-q} \cdot x = y\ ,\ -q \in \mathbb{Z} \implies yRx$

R es transitiva.
Si xRy y yRz entonces se tiene:

$(\exists q; q \in \mathbb{Z}) : x = 7^q \cdot y$ y $(\exists q_0; q_0 \in \mathbb{Z}) : y = 7^{q_0} \cdot\ z$

De donde se tiene: $x = 7^q \cdot y = 7^q \cdot 7^{q_0} \cdot\ z = 7^{q+q_0} \cdot\ z,\ (q+q_0) \in \mathbb{Z} \implies xRz$

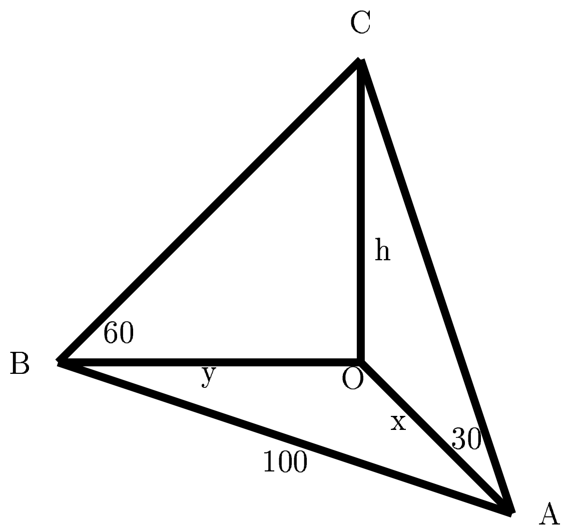
(ii) $\overline{\left(\dfrac{3}{4}\right)} = \left\{ \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \mid \dfrac{a}{b}\, R\, \dfrac{3}{4} \right\}$

Solución:

$$\overline{\left(\frac{3}{4}\right)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \mid \frac{a}{b}\, R\, \frac{3}{4} \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \mid \frac{a}{b} = 7^q \frac{3}{4}\, ,\, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

(2) Una persona ubicada al norte de una torre, la observa con un ángulo de elevación de 30 grados y otra persona ubicada al este de la torre, la observa con un ángulo de elevación de 60 grados . Si la distancia entre las personas es 100 metros. Determine la altura de la torre.

Solución



Sea h la altura de la torre, entonces se tiene :

En el triángulo AOC $tg(30) = \dfrac{h}{x}$ y en el triángulo COB $tg(60) = \dfrac{h}{y}$ es decir:

$$h = tg(30)x = tg(60)y$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{3}y$$

$$x = 3y$$

Por otro lado el triángulo AOB es rectángulo ,de donde se tiene:

$$y^2 + x^2 = 100^2$$

$$y^2 + (3y)^2 = 100^2$$

$$y = 10\sqrt{10}$$

lo que implica $x = 30\sqrt{10}$

escogiendo cualquiera de los dos valores se tiene que:

$$h = tg(30)\ 30\sqrt{10} = tg(60)\ 10\sqrt{10} = 10\sqrt{30}$$

es decir la altura de la torre es de $10\sqrt{30}$ mts.

(3) Un bebé pesa 6 kilos al nacer y 12 años después pesa 54 kilos. Suponga que el peso P en kilos esta relacionado linealmente con la edad t en años.

(a) Determine P en términos de t.

Solución

Si $t = 0 \longrightarrow P = 6$ y si $t = 12 \longrightarrow P = 54$

Considere $(0,6)$, $(12,54)$ y la recta L que pasa por esos puntos

$$\longrightarrow m_L = \frac{54-6}{12-0} = 4 \longrightarrow L : P - 6 = 8(t-0) \longrightarrow P = 4t + 6$$

(b) ¿Cuál será el peso del joven cuando tenga la edad de 17 años?.

Solución

Basta reemplazar en la ecuación de L , $t = 17$ y queda

$P = 4 \cdot 17 + 6 = 74 \longrightarrow$ el joven cuando tenga la edad de 17 años pesará $74Kg$.

(c) ¿A qué edad pesará 90 kilos?.

Solución

Basta reemplazar en la ecuación de L , $P = 90$ y queda

$90 = 4 \cdot t + 6 \longrightarrow t = 21$. El joven cuando tenga 21 años pesará $90Kg$.

(4) Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$tal que $T\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_2 - a_0x - a_1x^2$

- Demuestre que T es un isomorfismo

Demostración

Primero ver que T es homomorfismo.

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_2 + b_2) - (a_0 + b_0)x - (a_1 + b_1)x^2 \\ &= (a_2 - a_0x - a_1x^2) + (b_2 - b_0x - b_1x^2) \\ &= T\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora ver que Tes biyectiva.

Analizemos el $\ker T$

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;/\; T\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;/\; a_2 - a_0x - a_1x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Asi se tiene que T es inyectiva.
ver la epiyectividad.

$$\forall u + vx + wx^2 \;,\; \exists \begin{pmatrix} -v \\ -w \\ u \end{pmatrix} \;, T\begin{pmatrix} -v \\ -w \\ u \end{pmatrix} = u + vx + wx^2$$

- Determine T^{-1}

Solución

$$T^{-1} : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \;\text{ tal que }\; : \; T(u + vx + wx^2) = \begin{pmatrix} -v \\ -w \\ u \end{pmatrix}$$