Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

PAUTA - PEP Nº 3
Algebra Ingeniería Civil
16 de Noviembre del 2002

(1) Si $z_0 = 2 - 2i\sqrt{3}$ entonces determine el conjunto:

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 - z_0 = 0\}.$$

Solución:

El conjunto S es el conjunto de las raices cuartas de z_0.

Si $z_0 = 2 - 2i\sqrt{3} \longrightarrow z_0 = 4\left(cos(\frac{5\pi}{3}) + isen(\frac{5\pi}{3})\right)$

$\longrightarrow S = \{z \;/\; z = \sqrt[4]{4}\, cis\left(\frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right),\ k \in \{0,1,2,3\}\}$

(2) Dado el sistema lineal $(\star)$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (\lambda-2)x & - & 2y & & & = & \lambda \\ x & + & (\lambda-3)y & - & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & (\lambda-3)z & = & 3 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine los conjuntos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución}\} \\ S_2 &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución única}\} \\ S_3 &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ no tiene solución única}\} \end{aligned}$$

Solución:

En primer lugar escribamos la matriz de coeficientes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow det(A) = (\lambda-2)(\lambda-3)^2$

Si $det(A) \neq 0 \longrightarrow$ existe única solución.

Es decir si $\lambda \neq 2 \wedge \lambda \neq 3 \longrightarrow$ existe única solución. Y en ese caso :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & -2 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda-3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & \lambda-3 & 3 \end{array}\right) \text{ haciendo O.E.F obtenemos:}$$

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda-3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\lambda-3} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda-1}{\lambda-3} \\ y = \dfrac{1}{\lambda-3} \\ z = \dfrac{2}{\lambda-3} \end{cases}$$

Si $det(A) = 0 \longleftrightarrow$ el sistema o no tiene o tiene infinitas soluciones.

$det(A) = 0 \longrightarrow \lambda = 3 \ \vee \ \lambda = 2.$

Si $\lambda = 3 \longrightarrow$ haciendo O.E.F en la aumentada se tiene:

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = z + 2 \\ y = \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \\ z \text{ libre} \end{cases}$$

Asi ,el sistema tiene infinitas soluciones si $\lambda = 3$.

Ahora si $\lambda = 2 \longrightarrow$ se tiene:

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = -1 \\ z \text{ libre} \end{cases}$$

Asi ,el sistema tiene infinitas soluciones si $\lambda = 2$.

en ese caso:

$S_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ \lambda = 2 \vee \lambda = 3\}.$

$S_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ \lambda \neq 2 \ \wedge \ \lambda \neq 3\}.$

$S_3 = \phi.$

(3) Sea $W = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \mid a_{ij} = \begin{cases} a & : \text{ si } i \leq j \\ b & : \text{ si } i = j+1 \\ c & : \text{ en otro caso} \end{cases} \right\}$

- Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$.

  Solución:

  Primero determine los elementos de W.

  $$A \in W \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ c & b & a \end{pmatrix} / \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

  $W \neq \phi$ pues la matriz nula está en W. $(a = b = c = 0)$

  Sean $A, B \in W \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 & a_0 \\ b_0 & a_0 & a_0 \\ c_0 & b_0 & a_0 \end{pmatrix}$.

  Es claro que :

  $$A + B = \begin{pmatrix} a + a_0 & a + a_0 & a + a_0 \\ b + b_0 & a + a_0 & a + a_0 \\ c + c_0 & b + b_0 & a + a_0 \end{pmatrix} \in W$$

  $$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha a & \alpha a \\ \alpha b & \alpha a & \alpha a \\ \alpha c & \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} \in W.$$

  Asi W es un subespacio de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$.

- Encuentre una base de W.

  Solución:

  Como :

  $$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

  Y el conjunto generador de W es l.i, luego es una base para W.

- Determine $\dim_{\mathbb{R}}(W)$.

  Solución:

  $dimW = 3$.

(4) (i) Sea $\alpha = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tal que $C = \{a \in \mathbb{R} \mid au = v\} = \emptyset$.

Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Considere la c.l nula: $xu + yv = \vec{0}$

Suponga que $x \neq 0 \longrightarrow u = -\frac{y}{x}v = \delta v$, con $\delta \in \mathbb{R}$

Pero por hipótesis se tiene que no existe ningún escalar que permita escribir u en c. l de v.

Asi se concluye que $x = 0 \longrightarrow yv = \vec{0} \longrightarrow y = 0$, pues $v \neq \vec{0}$, ya que $C = \phi \longrightarrow \alpha$ es l.i y portanto es base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2\}$ una base de V.

Determine el conjunto: $S = \{a \in \mathbb{R} \mid \beta = \{v_1 + av_2, v_1 - av_2\}$ es una base de $V\}$.
solución:

Considere la c.l nula:

$$x(v_1 + av_2) + y(v_1 - av_2) = \vec{0} \quad \longrightarrow (x+y)v_1 + (xa - ya)v_2 = 0$$

$$\longrightarrow x + y = 0 \wedge xa - ya = 0, \ (\alpha \text{ es l.i})$$

Como queremos que $x = 0 \wedge y = 0$ entonces el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ xa - ya = 0 \end{array}\right| \quad \text{debe tener única solución.}$$

Para esto el determinante de la matriz de coeficientes del sistema debe tener determinante no cero.

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix} = -2a \longrightarrow a \neq 0$$

Luego si $a \neq 0$ entonces el conjunto β es l.i.

y como cualquier base de V debe tener dos vectores entonces β es base de V.

Asi $S = \mathbb{R} - \{0\}$