

(1.a) Demuestre usando propiedades (sin desarrollar directamente) que

$$\det \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & (a^2 + 2a) & (2a + 1) & 1 \\ a & (2a + 1) & (a + 2) & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (a - 1)^6$$

Solución

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & (a^2 + 2a) & (2a + 1) & 1 \\ a & (2a + 1) & (a + 2) & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \stackrel{(l_1 \rightarrow l_1 - l_4)}{=} \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 & 3a^2 - 3 & 3a - 3 & 0 \\ a^2 & (a^2 + 2a) & (2a + 1) & 1 \\ a & (2a + 1) & (a + 2) & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ & \stackrel{(l_2 \rightarrow l_2 - l_4)}{=} \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 & 3a^2 - 3 & 3a - 3 & 0 \\ a^2 - 1 & (a^2 + 2a - 3) & (2a + 1 - 3) & 0 \\ a & (2a + 1) & (a + 2) & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ & \stackrel{(l_3 \rightarrow l_3 - l_4)}{=} \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 & 3a^2 - 3 & 3a - 3 & 0 \\ a^2 - 1 & (a^2 + 2a - 3) & (2a + 1 - 3) & 0 \\ a - 1 & (2a + 1 - 3) & (a + 2 - 3) & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 & 3a^2 - 3 & 3a - 3 & 0 \\ a^2 - 1 & (a^2 + 2a - 3) & (2a + 1 - 3) & 0 \\ a - 1 & 2(a - 1) & (a - 1) & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ & = (a - 1) \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 & 3a^2 - 3 & 3(a - 1) & 0 \\ a^2 - 1 & (a^2 + 2a - 3) & 2(a - 1) & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \stackrel{(l_1 \rightarrow l_1 - 3(a-1)l_3)}{=} (a - 1) \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 - 3(a - 1) & 3a^2 - 3 - 6(a - 1) & 0 & 0 \\ a^2 - 1 & (a^2 + 2a - 3) & 2(a - 1) & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \stackrel{(l_1 \rightarrow l_1 - 2(a-1)l_3)}{=} (a - 1) \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 - 3(a - 1) & 3a^2 - 3 - 6(a - 1) & 0 & 0 \\ a^2 - 1 - 2(a - 1) & (a^2 + 2a - 3) - 4(a - 1) & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = (a - 1) \det \begin{pmatrix} a^3 - 1 - 3(a - 1) & 3a^2 - 3 - 6(a - 1) & 0 & 0 \\ a^2 - 1 - 2(a - 1) & (a^2 + 2a - 3) - 4(a - 1) & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = (a - 1) \det \begin{pmatrix} a^3 - 3a + 2 & 3a^2 - 6a + 3 & 0 & 0 \\ a^2 - 2a + 1 & a^2 - 2a + 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = (a - 1)(a^2 - 2a + 1) \det \begin{pmatrix} a^3 - 3a + 2 & 3a^2 - 6a + 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)(a^3 - 3a + 2 - 3a^2 + 6a - 3) \\ & = (a - 1)(a^2 - 2a + 1)(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) \\ & = (a - 1)^6 \end{aligned}$$

¹Cada problema vale 1.5 puntos
 Tiempo: 90 minutos

(1.b) Demuestre que $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right)$, para $(n \in \mathbb{N})$

Solución

Expresando el complejo $(1 + i)$ en forma trigonométrica tenemos que

$$1 + i = |1 + i|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1 + i = |1 + i|(\cos \alpha + i \sin \alpha) &\iff \begin{array}{l} \sqrt{2} \cos \alpha = 1 \\ \sqrt{2} \sin \alpha = 1 \end{array} \\ &\iff \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \\ &\implies \alpha = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Así que,

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Por tanto;

$$\begin{aligned} (1 + i)^n &= (\sqrt{2})^n \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

(2) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Suponga que existe $P \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ tal que $B = P^{-1}AP$

(a) Demuestre que $B^n = P^{-1}A^nP$ ($n \in \mathbb{N}$) y

Solución

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &\implies B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ &\implies B^2 = P^{-1}APP^{-1}AP \\ &\implies B^2 = P^{-1}A^2P \\ &\implies B^2 = P^{-1}A^2P \end{aligned}$$

Así que iterando el proceso tenemos que:

$$\begin{aligned}
 B^n &= BBB \cdots B \quad (\text{n - veces}) \\
 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) \quad (\text{n - veces}) \\
 &= P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP \\
 &= P^{-1}AAA \cdots AP \quad (\text{n - veces}) \\
 &= P^{-1}A^n P
 \end{aligned}$$

(b) Concluya que $\sum_{i=0}^n a_i A^i = (0) \implies \sum_{i=0}^n a_i B^i = (0)$

Solución

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n a_i B^i &= \sum_{i=0}^n a_i (P^{-1}AP)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n a_i (P^{-1}A^i P) \\
 &= \sum_{i=0}^n (P^{-1}a_i A^i P) \\
 &= P^{-1} \left(\sum_{i=0}^n a_i A^i \right) P \\
 &= P^{-1} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^n a_i A^i \right)}_{(0)} P \\
 &= P^{-1}(0)P \\
 &= (0)
 \end{aligned}$$

(3) Una matriz $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, se llama una matriz ortogonal si satisface simultáneamente las siguiente dos propiedades:

- (a) $A \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ (es decir, A invertible)
- (b) $A^{-1} = A^t$, donde A^t , es la matriz traspuesta de la matriz A .

Si A es una matriz ortogonal entonces demuestre que:

- (i) $\det(A) = \pm 1$

Solución

$$\begin{aligned}
 A^{-1} = A^t &\implies AA^t = I_n \\
 &\implies \det(AA^t) = \det(I_n) \\
 &\implies \det(A) \det(A^t) = 1 \\
 &\implies \det(A) \det(A) = 1 \\
 &\implies (\det(A))^2 = 1 \\
 &\implies \det(A) = \pm 1
 \end{aligned}$$

(ii) A^{-1} es ortogonal

Solución

- A invertible entonces A^{-1} es invertible, y su inversa es A .
- Ahora

$$\begin{aligned}
 A^{-1}(A^{-1})^t &= A^{-1}(A^t)^{-1} \\
 &= (A^t A)^{-1} \\
 &= I_n^{-1} \\
 &= I_n
 \end{aligned}$$

Luego, A^{-1} es una matriz ortogonal.

(iii) A^t es ortogonal

Solución

- A invertible entonces A^t es invertible pues,

$$AA^{-1} = I_n \implies (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t = I_n$$

- Ahora

$$\begin{aligned}
 A^t(A^t)^t &= A^t A \\
 &= I_n \quad (A \text{ matriz ortogonal})
 \end{aligned}$$

Luego, A^t es una matriz ortogonal.

(4) Considere el sistema lineal:

$$(1) \quad \left. \begin{array}{r} x - by - cz = 0 \\ -ax + y - cz = 0 \\ -ax - by + z = 0 \end{array} \right|$$

Si el sistema (1) tiene mas de una solución entonces demuestre que:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1$$

Solución

Escalonemos la matriz asociada al sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ -a & 1 & -c \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1-ab & -c-ac \\ 0 & -b-ab & 1-ac \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1 & \frac{-c-ac}{1-ab} \\ 0 & -b-ab & 1-ac \end{pmatrix} \quad (ab \neq 1) \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1 & \frac{-c-ac}{1-ab} \\ 0 & 0 & (1-ac) + \frac{(b+ab)(-c-ac)}{1-ab} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como el sistema tiene más de una solución su rango es menor que 3, y entonces es 2, luego, debe ocurrir que:

$$(1-ac) + \frac{(b+ab)(-c-ac)}{1-ab} = 0$$

Equivalentemente

$$1 - 2abc - ab - ac - bc = 0 \quad (*)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} &= \frac{a(1+b)(1+c) + b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\
&= \frac{a + ac + ab + abc + b + bc + ab + abc + c + bc + ac + abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\
&= \frac{a + b + c + 1 + 1 - abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \quad (\text{Se ha aplicado } (*)) \\
&= \frac{a + b + c + 1 + 1 - abc}{1 + a + b + c + ab + bc + ac + abc} \\
&= \frac{1 + a + b + c + 1 - abc}{1 + a + b + c + 1 - abc} \quad (\text{Se ha aplicado } (*)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

ESPERO QUE HAYA TENIDO UN BUEN DESEMPEÑO !!!