PAUTA PEP3
Álgebra ING. CIVIL
(enero 2003)

(1) Determine los valores de "k" para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x+3y+k\,z=3 \\ x+k\,y+3z=2 \end{array}\right|$$

tenga: (a) solución única
(b) ninguna solución
(c) infinitas soluciones

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x+3y+k\,z=3 \\ x+k\,y+3z=2 \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (L_2 \to L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \to L_3 - L_1) \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (L_3 \to L_3 - (k-1)L_2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(k+2)(k-1) & 1-(k-1) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & (3+k)(2-k) & 2-k \end{array}\right]$$

En consecuencia:
(a) El sistema tiene solución única si la tercera fila es distinta de cero, es decir si:

$$k \neq 2 \quad \wedge \quad k \neq -3$$

(b) El sistema no tiene solución si**: k = -3**, porque en tal caso tenemos: 0 = 5, en la tercera fila.

(c) Si k = 2, el sistema tiene infinitas soluciones, porque "x" e "y" quedan en función de "z".

(2) Demuestre que el conjunto:

$$W=\{(x,y,z,w)\in \mathbb{R}^4 / 3y-x=0 \ \wedge \ 4z=0\}$$

es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, y expréselo con generadores.

Solución:

$$\begin{aligned} & W=\{(x,y,z,w)\in R^4 / 3y-x=0 \ \wedge \ 4z=0\} \\ \Leftrightarrow \ & W=\{(x,y,z,w)/ x=3y \wedge z=0\} \\ \Leftrightarrow \ & W=\{(3y,y,0,w)/ y\in R \wedge w\in R\} \end{aligned}$$

(a) Primero demostramos que $W \leq \mathbb{R}^4$

(i) Por demostrar que: $W \neq \phi$

$$y=0 \wedge w=0 \quad \Rightarrow \quad (3\cdot 0,0,0,0)=(0,0,0,0)\in W \quad \Rightarrow \quad W\neq \phi$$

(ii) Por demostrar que: $u\in W \wedge v\in W \quad \Rightarrow \quad u+v\in W$

$$\left.\begin{array}{r} u\in W \Rightarrow u=(3u_2,u_2,0,u_4) \\ v\in W \Rightarrow v=(3v_2,v_2,0,v_4) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u+v=(3(u_2+v_2),(u_2+v_2),0,(u_4+v_4))\in W$$

(iii)Por demostrar que: $\lambda \in \mathbb{R} \wedge u\in W \quad \Rightarrow \quad \lambda u\in W$

$$u\in W \quad \Rightarrow \quad u=(3u_2,u_2,0,u_4) \quad \Rightarrow \quad \lambda u=(3(\lambda u_2),(\lambda u_2),0,(\lambda u_4))\in W$$

Luego, de (i), (ii) y (iii): $W \leq R^4$

(b) Ahora W en términos de generadores:

$$\begin{aligned} & W=\{(3y,y,0,w)/ y\in \mathbb{R} \wedge w\in \mathbb{R}\} \\ \Leftrightarrow & W=\{(3y,y,0,0)+(0,0,0,w)/ y\in \mathbb{R} \wedge w\in \mathbb{R})\} \\ \Leftrightarrow & W=\{y(3,1,0,0)+w(0,0,0,1)/ y\in \mathbb{R} \wedge w\in \mathbb{R}\} \\ \Leftrightarrow & W=\langle(3,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle \leq \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

(3) Determine el subespacio generado por el conjunto de vectores:

$$a = \{1, x-2, x^2-2x+1\}$$

como subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$

Solución:

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \quad \wedge \quad u, v, w \in \mathbb{R}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
p(x) \in \langle a \rangle &\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 = u \cdot 1 + v(x-2) + w(x^2-2x+1) \\
&\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 = u + v\,x - 2v + w\,x^2 - 2w\,x + w \\
&\Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 = (u-2v+w) + (v-2w)\,x + (w)\,x^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u - 2v + w = a_0 \\ v - 2w = a_1 \\ w = a_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow w = a_2 \wedge v = a_1 + 2a_2 \wedge u = a_0 + 2(a_1 + 2a_2) - a_2 \\
&\Leftrightarrow w = a_2 \wedge v = a_1 + 2a_2 \wedge u = a_0 + 2a_1 + 3a_2
\end{aligned}$$

Luego $p(x) \in \langle a \rangle \quad \forall p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \langle \{1, x-2, x^2-2x+1\} \rangle = \mathbb{R}_2[x]$

El subespacio generado por a es $\mathbb{R}_2[x]$.

(4) Sean: $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a+b+c=d\right\}$ y $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b+c=0\right\}$ subespacios de $M_{\mathbb{R}}(2)$

Encuentre:

(a) Una base para U
(b) Una base para V
(c) Dim($U \cap V$) y dim $(U+V)$

Solución:

(a) $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a+b+c=d\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix} / a,b,c\in \mathbb{R}\right\}$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} / a,b,c\in \mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

Además: $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow a=b=c=0$

Entonces: $\alpha=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es L.I. $\Rightarrow \alpha$ es base de U y dim(U) = 3

(b) $V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b+c=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & -c \\ c & d \end{pmatrix} / a,c,d\in \mathbb{R}\right\}$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / a,c,d\in \mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

Además: $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow a=c=d=0$

Entonces: $\beta=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es L.I. $\Rightarrow \beta$ es base de V y dim(V) = 3

(c) $U\cap V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a+b+c=d \wedge b+c=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a=d \wedge b=-c\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} / a,c\in \mathbb{R}\right\}$

$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} / a,c\in \mathbb{R}\right\}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ es L.I. $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{U}\cap\mathrm{V})=2$

Luego: dim(U + V) = dim(U) + dim(V) – dim($U \cap V$) = 3 + 3 – 2 = 4