Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Prueba Especial Programada N° 4[1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
10 de enero del 2004

(1) Sea $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función}\}$. Diremos que

- f es una "función par" si verifica "f(x)=f(-x)". Por ejemplo $f(x) = x^2$
- f es una "función impar" si verifica "f(-x)=-f(x)". Por ejemplo $f(x) = x^3$

(1.a) Demuestre que $\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es par}\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid g \text{ es impar}\}$ son subespacios de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

Solución

(i) Sean $f \in \mathbb{W}_1$, $g \in \mathbb{W}_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= f(x) + g(x) \quad (f \text{ y } g \text{ son elementos de } \mathbb{W}_1) \\ &= (f+g)(x) \end{aligned}$$

Luego, $(f + g) \in \mathbb{W}_1$

Ahora,

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)(-x) &= \lambda \cdot f(-x) \\ &= \lambda \cdot f(x) \quad (f \text{ es elemento de } \mathbb{W}_1) \\ &= (\lambda \cdot f)(x) \end{aligned}$$

Luego, $(\lambda \cdot f) \in \mathbb{W}_1$

Así que, $\mathbb{W}_1$ es un subespacio de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

(ii) Sean $f \in \mathbb{W}_2$, $g \in \mathbb{W}_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 120 minutos

$$
\begin{aligned}
(f+g)(-x) &= f(-x)+g(-x) \\
&= -f(x)-g(x) \quad (f \text{ y } g \text{ son elementos de } \mathbb{W}_2) \\
&= -(f+g)(x)
\end{aligned}
$$

Luego, $(f+g) \in \mathbb{W}_2$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
(\lambda \cdot f)(-x) &= \lambda \cdot f(-x) \\
&= \lambda \cdot -f(x) \quad (f \text{ es elemento de } \mathbb{W}_2) \\
&= -(\lambda \cdot f)(x)
\end{aligned}
$$

Luego, $(\lambda \cdot f) \in \mathbb{W}_2$

Así que, $\mathbb{W}_2$ es un subespacio de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

(1.b) Demuestre que $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{W}_1 \bigoplus \mathbb{W}_2$
Solución

Sea $f \in F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x)+f(-x)-f(-x) &\Longrightarrow 2f(x) = f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x) \\
&\Longrightarrow f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{g_2(x)}
\end{aligned}
$$

Ahora

(i) $\quad f_1(-x) = \left(\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}\right) = f_1(x)$. Por tanto $f_1 \in \mathbb{W}_1$. (f_1 es una función par.)

Analogamente

(ii) $\quad g_2(-x) = \left(\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}\right) = -g_2(x)$. Por tanto $g_2 \in \mathbb{W}_2$. (g_2 es una función impar.)

Finalmente

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 &\Longrightarrow f \in \mathbb{W}_1 \wedge f \in \mathbb{W}_2 \\ &\Longrightarrow f(x) = f(-x) \wedge f(-x) = -f(x) \quad (\forall x; x \in \mathbb{R}) \\ &\Longrightarrow f(x) = -f(x) \quad (\forall x; x \in \mathbb{R}) \\ &\Longrightarrow f(x) = 0 \quad (\forall x; x \in \mathbb{R}) \\ &\Longrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

(2) Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_{s-1}\}$ son subconjuntos del $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $\mathbb{V}$, tal que $w_r = av_r - rv_s$, con $a \neq 0$ y $r = 1, 2, \dots s-1$. Demuestre que

$$\alpha \text{ Linealmente Independiente en } \mathbb{V} \Longrightarrow \beta \text{ Linealmente Independiente en } \mathbb{V}$$

Solución

Supongamos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} x_i w_i = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_{s-1} w_{s-1} = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s-1} x_i w_i = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{s-1} x_i (a v_i - i v_s) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{s-1} (a x_i) v_i - \left(\sum_{i=1}^{s-1} i x_i \right) v_s = 0 \\ &\stackrel{(\alpha \text{ L.i.})}{\Longrightarrow} \quad (a x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s-1) \ \wedge \ \left(\sum_{i=1}^{s-1} i x_i \right) = 0 \\ &\stackrel{(a \neq 0)}{\Longrightarrow} \quad x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s-1) \\ &\Longrightarrow \quad \beta \text{ es L.i.} \end{aligned}$$

(3) Sea $T : \mathbb{R}_1[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}_2[x])$

Solución

Sea $p(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- P.d.q. $\quad T(p(x)+q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) &= x(p(x)+q(x)) \\ &= xp(x)+xq(x) \\ &= T(p(x))+T(q(x)) \end{aligned}$$

- P.d.q. $\quad T(\lambda p(x)) = \lambda T(p(x))$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(x)) &= x\lambda p(x) \\ &= \lambda x p(x) \\ &= \lambda T(p(x)) \end{aligned}$$

Así que, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}_2[x])$

(b) Determine $\ker(T)$ y $\dim(\mathrm{Img}(T))$

Solución

$$\begin{aligned} p(x) \in \ker(T) &\Longleftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] \wedge T(p(x)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] \wedge xp(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] \wedge x(a_0 + a_1x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] \wedge a_0x + a_1x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x \in \mathbb{R}_1[x] \wedge a_0 = 0 \wedge a_1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow p(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ker(T) = \{0\} \end{aligned}$$

Luego $\ker(T) = \{0\}$ y usando las conclusiones del teorema de la dimensión tenemos que $\dim(\mathrm{Img}(T)) = 2$.

(c) Determine $[T]_{\alpha}^{\beta}$, donde $\alpha = \{1, x\}$ y $\beta = \{x, x-1, x^2-1\}$

Solución

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = ([T(1)]_{\beta}\ [T(x)]_{\beta})$$

En general, tenemos que

$$\begin{aligned}
a_0x + a_1x^2 = b_0x + b_1(x-1) + b_2(x^2-1) &\iff a_0x + a_1x^2 = -b_1 - b_2 + (b_0+b_1)x + b_2x^2\\
&\Longrightarrow \begin{array}{rcl|} -b_1 - b_2 &=& 0\\ b_0 + b_1 &=& a_0\\ b_2 &=& a_1 \\ \hline \end{array}\\
&\Longrightarrow b_0 = a_1 + a_0 \ \wedge\ b_1 = -a_1 \ \wedge\ b_2 = a_1\\
&\Downarrow\\
\left[a_0x + a_1x^2\right]_\beta &= \begin{pmatrix} a_1 + a_0\\ -a_1\\ a_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[T]_\alpha^\beta &= ([T(1)]_\beta\ [T(x)]_\beta)\\
&= ([x]_\beta\ [x^2]_\beta)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $\operatorname{Img}(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y T no sea un Isomorfismo.(Demuestre todas sus afirmaciones)

Solución

Debemos determinar $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$.

Etapa 1. Sea $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces α es la base canónica de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

Etapa 2. Define para T los valores particulares

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{(Luego } T \text{ no será inyectiva)}\\
T\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} && (T \text{ tendrá la Imagen pedida})\\
T\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Etapa 3. Define T en general

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= T\left(a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= a_{11}T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{12}+a_{21}+a_{22} & a_{12}+a_{21}+a_{22} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}+a_{21}+a_{22} & a_{12}+a_{21}+a_{22} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$$