PAUTA PEP4
Álgebra ING. CIVIL
(enero 2003)

(1) Sean $S=\{t,\, t^2+3,\, 2t^2+t\}$ y $T=\{t-2,\, t+3,\, t^2+1\}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$,

y sea $u=9-t+7t^2$ un vector en base canónica.

(a) Encuentre u en la base S: $[u]_S$

(b) Encuentre la matriz de cambio de base de S a T: $[I]_S^T$

(c) Encuentre el vector $[u]_T$ usando (b)

Solución:

(a) $u=9-t+7t^2 = a\,(t)+b\,(t^2+3)+g\,(2t^2+t)$, $a,b,g \in \mathbb{R}$

$$= at+bt^2+3b+2gt^2+gt$$

$$=(3b)+(a+g)t+(b+2g)t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b=9 & \Rightarrow b=3 \\ a+g=-1 & \Rightarrow a=-3 \\ b+2g=7 \Rightarrow 2g=7-3=4 & \Rightarrow g=2 \end{cases}$$

$$\therefore u_s=-3(t)+3(t^2+3)+2(2t^2+t) \;\Rightarrow\; [u]_S=\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}$$

(b) (1) $t=a\,(t-2)+b\,(t+3)+g\,(t^2+1)$, $a,b,g\in\mathbb{R}$

$$=at-2a+bt+3b+gt^2+g$$

$$=(-2a+3b+g)+(a+b)t+(g)t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+3b+g=0 \\ a+b=1 \\ g=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{3}{5} \wedge b=\frac{2}{5} \wedge g=0$$

$$\therefore t=\frac{3}{5}(t-2)+\frac{2}{5}(t+3)+0(t^2+1)$$

(2) $t^2+3=a\,(t-2)+b\,(t+3)+g\,(t^2+1)$, $a,b,g\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+3b+g=3 \\ a+b=0 \\ g=1 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{2}{5} \wedge b=\frac{2}{5} \wedge g=1$$

$$\therefore t^2+3=-\frac{2}{5}(t-2)+\frac{2}{5}(t+3)+1(t^2+1)$$

(3) $2t^2 + t = \alpha\,(t-2) + \beta\,(t+3) + \gamma\,(t^2+1), \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \ \alpha = 1 \ \wedge \ \beta = 0 \ \wedge \ \gamma = 2$$

$$\therefore\ 2t^2 + t = 1(t-2) + 0(t+3) + 2(t^2+1)$$

De (1), (2) y (3): $\quad [I]_S^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$(c) \quad [u]_T = [I]_S^T\,[u]_S = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

(2) Sea $T \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que:

$$T(x,y,z) = (x+y+z, x+y-3z, z)$$

(a) Determine $\ker(T)$

(b) Calcule $\dim(\operatorname{Im} T)$

(c) Calcule (x, y, z) tal que $T(x,y,z) = (1,2,3)$

Solución:

(a) $Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / T(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+y+z, x+y-3z, z) = (0,0,0)\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{|c|} x+y+z=0 \\ x+y-3z=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \wedge y = -x\}$

$= \{(x,-x,0) / x \in \mathbb{R}\}$

(b) $\ker(T) = \{(x,-x,0) / x \in \mathbb{R}\}$

$= \langle\{(1,-1,0)\}\rangle$

$\Rightarrow \dim \ker(T) = 1$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = 2$ por teorema de la dimensión

(c) $T(x,y,z)=(1,2,3) \Leftrightarrow (x+y+z, x+y-3z, z)=(1,2,3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-3z=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ x+y=11 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución.

Luego, no existe $(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(1,2,3)$

(3) Dada $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x,y,z)=(x+y+z,\ y+z,\ -z)$$

(a) Demuestre que T es transformación lineal y es un isomorfismo

(b) Encuentre $T^{-1}(x,y,z)$

Solución:

(a) En primer lugar demostramos que $T\in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

Sean $u=(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ y $v=(a,b,c)\in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(x+a,\ y+b,\ z+c) \\ &= (x+a+y+b+z+c,\ y+b+z+c,\ -z-c) \\ &= ((x+y+z)+(a+b+c),\ (y+z)+(b+c),\ (-z)+(-c)) \\ &= (x+y+z,\ y+z,\ -z)+(a+b+c,\ b+c,\ -c) \\ &= T(x,y,z)+T(a,b,c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z) \\ &= (\lambda x+\lambda y+\lambda z,\ \lambda y+\lambda z,\ -\lambda z) \\ &= \lambda(x+y+z,\ y+z,\ -z) \\ &= \lambda T(x,y,z) \end{aligned}$$

Luego, $T\in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

En segundo lugar demostramos que T es un isomorfismo, si es que lo es.

Elijo el método del determinante, esto es, mostraremos que T es un isomorfismo si y sólo si $\det(T)\neq 0$:

$$[T]_{c(3)}^{c(3)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)(1-0)=-1\neq 0$$

Luego, T es un isomorfismo.

Método alternativo:

$$
\begin{aligned}
u \in \ker(T) &\Leftrightarrow u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow u = (x, y, z) \wedge T(x, y, z) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow u = (x, y, z) \wedge (x + y + z,\ y + z, -z) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow u = (x, y, z) \wedge \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -z = 0 \end{array}\right| \Rightarrow [x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0] \\
&\Leftrightarrow u = (0,0,0)
\end{aligned}
$$

Así que $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$ y T es inyectiva, y aplicando el teorema de la dimensión tenemos que T es sobreyectiva; por lo tanto T es un isomorfismo.

(b) Si T es biyectiva entonces admite inversa:

Sean $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$
\begin{aligned}
T(u) = v \Leftrightarrow T(x, y, z) &= (a,b,c) \\
&\Leftrightarrow (x + y + z,\ y + z, -z) = (a,b,c) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ -z = c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = -c \\ y = b + c \\ x = a - b \end{cases}
\end{aligned}
$$

En consecuencia: $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $T^{-1}(x, y, z) = (x - y,\ y + z, -z)$

(4) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una T.L. definida por:

$$T(x, y, z) = (2y + 2z,\ \ x + 3y + z,\ \ 3x + 2y + z)$$

(a) Encuentre la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases canónicas

(b) Determine si T es diagonalizable

(c) Si a es la base de los vectores propios, compruebe que:

$$[T]_a^a = [I]_{c(3)}^a\, [T]_{c(3)}^{c(3)}\, [I]_a^{c(3)}$$

Solución:

$$(a)\quad [T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(*b*) $P_T(l) = \det[l I_3 - T]_{c(3)}^{c(3)} = \det\begin{pmatrix} l & -2 & -2 \\ -1 & l-3 & -1 \\ -3 & -2 & l-1 \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} l+2 & -2 & -2 \\ 0 & l-3 & -1 \\ -l-2 & -2 & l-1 \end{pmatrix}$$

$$= (l+2)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & l-3 & -1 \\ -1 & -2 & l-1 \end{pmatrix}$$

$$= (l+2)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & l-3 & -1 \\ 0 & -4 & l-3 \end{pmatrix}$$

$$= (l+2)\left[(l-3)^2 - 4\right]$$

$$= (l+2)(l-1)(l-5)$$

$P_T(l) = 0 \Rightarrow (l+2)(l-1)(l-5) = 0 \Rightarrow l = -2,\ l = 1,\ l = 5$

que son valores propios reales y distintos; luego T es diagonalizable.

(c) Determinamos los vectores propios de $[T]_{c(3)}^{c(3)}$

(1) Para $l = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \wedge z = -x$$

$$\Rightarrow a = (x, y, z) = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1) \Rightarrow a_1 = (1, 0, -1)$$

(2) Para $l = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2}z \ \wedge \ y = -\frac{3}{4}z$$

$$\Rightarrow a = (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}z, -\frac{3}{4}z, z\right) = \frac{z}{4}(2, -3, 4) \Rightarrow a_2 = (2, -3, 4)$$

(3) Para $l = 5$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{3}{4} z \ \wedge \ y = \frac{7}{8} z$$

$$\Rightarrow a = (x, y, z) = \left(\frac{3}{4} z, \frac{7}{8} z, z \right) = \frac{z}{8}(6,7,8) \Rightarrow a_3 = (6,7,8)$$

Así una base de vectores propios es:

$$a = \{(1,0,-1),(2,-3,4),(6,7,8)\}$$

En consecuencia: $[I]_a^{c(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow [I]_{c(3)}^a = \left([I]_a^{c(3)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{8}{21} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{28} & \frac{1}{14} & \frac{1}{28} \end{pmatrix}$

Entonces:

$$[I]_{c(3)}^a [T]_{c(3)}^{c(3)} [I]_a^{c(3)} = \begin{pmatrix} \frac{13}{21} & -\frac{2}{21} & -\frac{8}{21} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{28} & \frac{1}{14} & \frac{1}{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = [T]_a^a$$