Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Prueba Especial Programada Nº 3 [1]
Álgebra Plan Anual
22 de Noviembre del 2003

(1.a) Demuestre usando propiedades (sin desarrollar directamente) que

$$det \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & (a^2+2a) & (2a+1) & 1 \\ a & (2a+1) & (a+2) & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (a-1)^6$$

(1.b) Demuestre que $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\ sen\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$, para $(n \in \mathbb{N})$

(2) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Suponga que existe $P \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ tal que $B = P^{-1}AP$

(a) Demuestre que $B^n = P^{-1}A^nP \quad (n \in \mathbb{N})$ y

(b) Concluya que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_iA^i = (0) \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_iB^i = (0);$ $\quad$ donde$A^0 = I_n$

(3) Una matriz $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, se llama una matriz ortogonal si satisface simultáneamente las siguiente dos propiedades:

(a) $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ (es decir, A invertible)

(b) $A^{-1} = A^t$, donde A^t, es la matriz traspuesta de la matriz$A$.

Si A es una matriz ortogonal entonces demuestre que:

(i) $\det(A) = \pm 1$
(ii) A^{-1} es ortogonal
(iii) A^t es ortogonal

(4) Considere el sistema lineal:

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & by & - & cz & = & 0 \\ -ax & + & y & - & cz & = & 0 \\ -ax & - & by & + & z & = & 0 \end{array}\right|$$

Si el sistema (1) tiene mas de una solución entonces demuestre que:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1$$

BUEN TRABAJO !!!

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 90 minutos