Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

1	
2	
3	
4	
Total	

Prueba Especial Programada N° 4[1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
10 de enero del 2004

(1) Sea $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es una función}\}$. Diremos que

- f es una "función par" si verifica "f(x)=f(-x)". Por ejemplo $f(x) = x^2$
- f es una "función impar" si verifica "f(-x)=-f(x)". Por ejemplo $f(x) = x^3$

(a) Demuestre que $\mathbb{W}_1 = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es par}\}$ y $\mathbb{W}_2 = \{g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid g \text{ es impar}\}$ son subespacios de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

(b) Demuestre que $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{W}_1 \bigoplus \mathbb{W}_2$

(2) Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_{s-1}\}$ son subconjuntos del $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $\mathbb{V}$, tal que $w_r = av_r - rv_s$, con $a \neq 0$ y $r = 1, 2, \dots s-1$. Demuestre que

$$\alpha \text{ Linealmente Independiente en } \mathbb{V} \Longrightarrow \beta \text{ Linealmente Independiente en } \mathbb{V}$$

(3) Sea $T : \mathbb{R}_1[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$

- Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}_2[x])$
- Determine $\ker(T)$ y $\dim(\text{Img}(T))$
- Determine $[T]_{\alpha}^{\beta}$, donde $\alpha = \{1, x\}$ y $\beta = \{x, x-1, x^2-1\}$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $\text{Img}(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y T no sea un Isomorfismo.(Demuestre todas sus afirmaciones)

BUEN TRABAJO !!!

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 120 minutos