Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación
Prof. Gabriel Rabanales R.

Ejercicios de Producto Interno

(Versión preliminar)

1. Hallar la norma de v = (1,2) $\in \mathbf{R}^2$
   1.1 Con respecto al producto interno canónico:
   1.2 Con respecto al producto interno: $\langle u,v\rangle = x_1y_1 - 2y_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$

Solución:

Respecto al producto interno canónico queda

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\langle (1,2),(1,2)\rangle} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Respecto al producto interno definido queda:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\langle (1,2),(1,2)\rangle} = \sqrt{1-2\cdot 1\cdot 2-2\cdot 2\cdot 1+5\cdot 2\cdot 2} = \sqrt{13}$$

2. Verificar la ley del paralelogramo

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Solución:

Sean u = (x_1, x_2) $\wedge$ v = (y_1,y_2) de donde se obtiene:

u + v = $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
u – v = $(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$

$$\begin{aligned}\langle u+v,u+v\rangle &= \langle (x_1+y_1, x_2+y_2),(x_1+y_1,x_2+y_2)\rangle \\ &= \langle x_1,x_1\rangle + 2\langle x_1,y_1\rangle + \langle y_1,y_1\rangle + \langle x_2,x_2\rangle + 2\langle x_2,y_2\rangle + \langle y_2,y_2\rangle \\ &= x_1^2 + 2|x_1||y_1| + y_1^2 + x_2^2 + 2|x_2||y_2| + y_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u-v,u-v\rangle &= \langle (x_1-y_1, x_2-y_2),(x_1-y_1,x_2-y_2)\rangle \\ &= x_1^2 - 2|x_1||y_1| + y_1^2 + x_2^2 - 2|x_2||y_2| + y_2^2\end{aligned}$$

$\| u + v \| = \sqrt{\langle u+v, u+v \rangle} = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}$

$\| u - v \| = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

Luego,

$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \|u\|^2 + 2 \|v\|^2$

Ya que:

$\|u\| = \sqrt{\langle (x_1, x_1), (x_1, x_2) \rangle} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$

$\|v\| = \sqrt{\langle (y_1, y_1), (y_1, y_2) \rangle} = \sqrt{y_1^{\,2} + y_2^{\,2}}$

3. Para que valores de k, es el siguiente un producto interno en $\mathbf{R}^2$

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + k x_2 y_2$$

Solución:

Sean

$$u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Por demostrar:

(1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

En efecto:

$\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle$

$= x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + k x_2 y_2$ (reordenando)

$= y_1 x_1 - 3y_1 x_2 - 3y_2 x_1 + k y_2 x_2$

$= \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle$

$= \langle v, u \rangle$

Por demostrar:

(2) $\langle u, u \rangle \geq 0$ $, u \neq 0$ $\wedge$ $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

En efecto:

$\langle u, u \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^{\,2} - 6x_1 x_2 + k x_2^{\,2}$

$= (x_1 - 3x_2)^2 \quad \Rightarrow k \geq 9$

4. Para qué valores de $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ es el siguiente un producto interno en $\mathbf{R^2}$**.**

Solución:

$$\langle u, v\rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$

Tenemos:

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1x_2 + dx_2^2$$

$$\left(\sqrt{a}x_1 + \sqrt{d}x_2\right)^2 = ax_1^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{d}x_1x_2 + dx_2^2$$

$$\Rightarrow \quad ax_1^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{d}x_1x_2 + dx_2^2 = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{a}\sqrt{d} = b + c$$

$$\Rightarrow \quad 4ad = (b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$\Rightarrow \quad 4ad - 2bc = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \quad 2ad - bc = \frac{b^2 + c^2}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad ad - \frac{bc}{2} > 0 \qquad \text{es la condición}$$

5. Dada $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ base de $\mathbf{R^3}$ **.** Hallar una **base ortonormal en** $\mathbf{R^3}$**.**

Solución:

Primero, normalizamos v_1

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Luego hacemos:

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1$$

$$\langle v_2, u_1\rangle = \left\langle (0,1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Luego:

$$w_2 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

luego normalizando W_2:

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

$$u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

análogamente con v_3:

$$\Rightarrow u_3 = \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

luego la base ortonormal pedida en $\mathbf{R^3}$ es:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\}$$

6. Encontrar una base ortonormal para el subespacio W de $\mathbf{R^3}$ dado por:

W = $\{(x,y,z)/\, x-y+2z=0\}$ con un producto interno estándar

Solución:

Obteniendo una base de W, sigue el siguiente proceso:

$$\begin{aligned} u\in R^3 &\Leftrightarrow u=(x,y,z)\wedge x-y+2z=0 \\ &\Leftrightarrow u=(x,y,z)\wedge x=y+2z \\ &\Leftrightarrow u=(y-2z,y,z)\wedge (y,z)\in R^2 \end{aligned}$$

$$W = \langle\{(1,1,0),(-2,0,1)\}\rangle$$

Ortogonalizando, queda:

$$w_1 = v_1 = (1,1,0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$= (-2,0,1) - \frac{\langle(-2,0,1),(1,1,0)\rangle}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) = (-1,1,1)$$

$\Rightarrow \{w_1, w_2\} = \{(1,1,0), (-1,1,1)\}$ es **base ortogonal para W**

Normalizando:

$$u_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$u_2 = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\Rightarrow$ { u_1 ,u_2 }={ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ } es <u>base ortonormal</u> para W

Una de las consecuencias más importantes de obtener una base ortonormal en un espacio euclídeo V, es que un producto interno arbitrario definido en V, cuando se expresa en términos de coordenadas, con respecto a la base **ortonormal**, se comporta de igual manera que el producto interno estándar en $\mathbf{R}^3$**.**
Se puede homologar, si y sólo si son **ortonormales.**

7. Dado el producto interno en $R_2[x]$:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

7.1 verificar que es un producto interior:

En efecto:

1. p.d.q.: $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)p(x)dx = \langle q, p \rangle$$

2. p.d.q. : $\langle p+q, s \rangle = \langle p, s \rangle + \langle q, s \rangle$

$$\begin{aligned}\langle p+q, s \rangle &= \int_{-1}^{1} (p+q)(x)s(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} p(x)s(x)dx + \int_{-1}^{1} q(x)s(x)dx \\ &= \langle p, s \rangle + \langle q, s \rangle\end{aligned}$$

3. p.d.q. : $\langle kp, s \rangle = k\langle p, s \rangle$

$$\langle kp, s \rangle = \int_{-1}^{1} kp(x)s(x)dx = k\int_{-1}^{1} p(x)s(x)dx = k\langle p, s \rangle$$

4. $\langle p, p \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)s(x)dx = \int_{-1}^{1} [p(x)]^2\, dx$

como $[p(x)]^2 \geq 0, \forall x \in [-1,1], asi \langle p, p \rangle \geq 0$

además, si:

$$\int_{-1}^{1} p^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0, \forall x \in [-1,1]$$

luego es producto interno

7.2 Averiguar si $\{1, x, x^2\}$ son mutuamente ortogonales

Solución

Notar que la condición de ortogonalidad implica que : $\langle p, q \rangle = 0$

1. $\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} xdx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^{1} = 0$

2. $\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^{1} = 0$

3. $\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq 0$

En consecuencia, **no son mutuamente ortogonales.**

7.3 Ortonormalizar dicho conjunto:

Se puede seguir el orden como en los ejercicios anteriores, o la siguiente estrategia:

Ortogonalizar $\{ v_1, v_2, v_3 \} = \{1, x, x^2\}$

$$w_1 = v_1 = 1$$

luego $$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = x - \cancel{\frac{\int_{-1}^{1} xdx}{2}}(1) = x$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} v_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = x^2 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\|x\|^2}(x) - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2}(1) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$así \quad , \quad w_i = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$$ es la **base ortogonalizada**.

Normalizando $w_i = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$, queda:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

así $u_i = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$ es la base ortonormal pedida.

8. Para el subespacio W_1 de $\mathbf{R^4}$ **,** determinar una base ortonormal:

$$W_1 = \{(x, y, z, w) \in R^4 \,/\, x - y + z - w = 0\}$$

La base en el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}
u \in R^4 &\Leftrightarrow u = (x, y, z, w) \wedge x - y + z - w = 0 \\
&\Leftrightarrow u = (x, y, z, w) \wedge y = x + z - w \\
&\Leftrightarrow u = (x, x + z - w, z, w) \wedge (x, z, w) \in R^3 \\
&\Leftrightarrow u = x(1,1,0,0) + z(0,1,1,0) + w(0,-1,0,1)
\end{aligned}$$

luego la base es $S = \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,-1,0,1)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Por Gram-Schmidt:

$$w_1 = v_1 = (1,1,0,0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (0,1,1,0) - \frac{\langle (0,1,1,0), (1,1,0,0)\rangle}{\|(1,1,0,00)\|^2}(1,1,0,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$= (0,-1,0,1) - \frac{\left\langle (0,-1,0,1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \right\rangle}{\left\| \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \right\|^2} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) - \frac{\langle (0,-1,0,1), (1,1,0,0) \rangle}{\|(1,1,0,0)\|^2} (1,1,0,0)$$

$$= (0,-1,0,1) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

normalizando :

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(1,1,0,0)}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

Base ortogonal: $\left\{ (1,1,0,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \right\}$

Base ortonormal: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \right\}$

9. Sea V el espacio de $M_R(2)$ y se define el producto interno:

$$\langle A, B \rangle = tr\left(B^t \cdot A\right)$$

1. Encontrar el ángulo entre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. Encontrar una base ortonormal de la base S $= \{v_1, v_2, v_3\} =$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

Solución:

1. Los vectores se re-expresan:

$$u=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}=(1,2,3,2)\quad , \quad v=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(2,1,0,-1)$$

luego, aplicando : $\langle u,v\rangle=\|u\|\,\|v\|\cos j$

$$\cos j=\frac{\langle p,q\rangle}{\|p\|\,\|q\|}=\frac{\langle(1,2,3,2),(2,1,0,-1)\rangle}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{18}\sqrt{6}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow j=\arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\approx +78°$$

Notar que $\cos j=0\Rightarrow u\perp v$

2. Por Gram-Schmidt, se tiene:

$$w_1=v_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|}w_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\cancel{\frac{tr\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{1^2+1^2+2^2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\frac{tr\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{tr\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\frac{tr\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{tr\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{5}{6}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-7 & 9\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

Normalizando queda:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{49+81+4+64}}{\sqrt{36}}} = \frac{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{198}{36}}} = \sqrt{\frac{2}{11}}\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{2}{6\sqrt{22}}\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$