Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. Matemática y Ciencia de la Computación

Prof. Gabriel Rabanales R.

Guía de ejercicios
Sistemas de ecuaciones lineales

1. Reduzca a la forma escalonada por filas las matrices:

a)

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3&-2\\4&2&0&0\\1&-2&3&4\\0&3&1&1\end{bmatrix}\quad \text{R: }\begin{bmatrix}1&-2&3&4\\0&1&5&12\\0&0&1&-45\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

b)

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\4&0&3\\6&2&1\end{bmatrix}\quad \text{R: }\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

c)

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&3\\3&4&2&1\\4&2&0&1\end{bmatrix}\quad \text{R: }\begin{bmatrix}1&3&2&-2\\0&1&\frac{-4}{5}&\frac{7}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

d)

$$A=\begin{bmatrix}3&2&0&4\\5&1&1&3\end{bmatrix}\quad \text{R: }\begin{bmatrix}1&3&-1&5\\0&1&\frac{-3}{7}&\frac{11}{7}\end{bmatrix}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas usando el método de matriz ampliada:

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 5x&-&3y&+&2z&+&w&=&0\\ x&+&y&+&4z&-&w&=&0\\ 3x&-&y&+&z&-&2w&=&0\\ 2x&-&2y&-&3z&-&w&=&0 \end{array}$$

$$\text{R: }\begin{cases}x=2w\\y=3w\\z=-w\\w=w\end{cases}$$ (Infinitas soluciones)

$$b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x&+&y&-&2z&-&w&=&0\\ 2x&+&2y&&&-&2w&=&0\\ 30x&-&2y&&&+&w&=&0\\ x&-&y&-&5z&+&2w&=&0 \end{array}$$

$$\text{R: }\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\w=0\end{cases}$$ (Solución trivial)

$$c)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x&+&3y&+&z&-&w&=&4\\ x&-&3y&+&3z&+&w&=&9\\ x&+&2y&-&z&+&w&=&-5\\ 3x&+&3y&-&2z&+&w&=&-2 \end{array}$$

$$\text{R: }\begin{cases}x=3\\y=-2\\z=1\\w=-3\end{cases}$$ (Solución única)

3. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y-3z=6 \\ -x-\ \ y+5z=4 \\ 2x+4y-4z=2 \\ x+2y-\ \ z=2 \end{array}\right|$$

a) Demuestre que tiene solución (es compatible)
b) La solución es única (es compatible determinado)
c) Encuentre la solución.

R: $a)\ r(A)=r\left(A|B\right)=3\ \Rightarrow$ existe solución

$b)\ r(A)=r\left(A|B\right)=3=m\ \Rightarrow$ solución única

$c)\ x=-1,\quad y=2,\quad z=1$

4. Estudie el siguiente sistema para soluciones en función del parámetro real a

$$\left.\begin{array}{r} ax+\ \ y+\ \ z=2a \\ x+ay+\ \ z=-1 \\ x+2y+az=-1 \end{array}\right|$$

R: $a)\ a=1\Rightarrow r\left(A\right)=2<r\left(A|B\right)=3\Rightarrow$ no existe solución

$b)\ a\neq 1\Rightarrow r\left(A\right)=r\left(A|B\right)=3=\mathrm{m}\ \Rightarrow$ existe solución única

5. Usando el método de matriz ampliada $\left(A|I_n\right)$ encuentre, si existe, la matriz inversa de:

a)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R: $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-7}{9} & \frac{-4}{9} \end{bmatrix}$

b)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

R: $r\left(A\right)=3\Rightarrow$ no existe matriz inversa

6. El siguiente sistema tiene solución única

$$\left.\begin{array}{r} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{array}\right|$$

Demuestre que $abc \neq 0$ y encuentre la solución.

7. Si existen x, y, z no todos nulos, tales que:

$$\left.\begin{array}{r} x=cy+bz \\ y=az+cx \\ z=bx+ay \end{array}\right|$$

demuestre que: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$

8. Resuelva, cuando sea posible, el sistema:

a)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-y+2z=-1 \\ 2x \quad\;\; +z=3 \\ 3x-y-z=6 \end{array}\right|$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} x-\;\; y+z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x+y-z=4 \\ x+2y+z=5 \end{array}\right|$$

9. Estudie y resuelva, cuando sea posible, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x \quad +y+z=8 \\ x-y+2z=k-1 \\ x+2y-kz=3k \end{array}\right|$$

10. Estudie y resuelva, cuando sea posible, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-1 \\ 2x-3y-z=7 \\ x+3y+kz=k \end{array}\right|$$

11. Determine el valor de $a \in$ ¡ para que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ 2x-ay+z=7 \\ 3x+y-az=3 \end{array}\right|$$

tenga solución única.