Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Industrial

Álgebra[1] - Solución Control N° 1 - Pep 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
5 de Julio del 2004

(1) Determine la ecuación (si es posible), de un círculo cuyo centro es el vértice de la parábola de ecuación $x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, y que además pasa por el punto, $P = (4, -5)$.

Solución

Etapa 1. Sea $C \; : \; (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, la ecuación del círculo pedida

Etapa 2. Datos

(i) El centro del círculo es el vértice de la parábola,

$$x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

Así que podemos determinar ese vértice completando cuadrados

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y - 3 = 0 &\iff x^2 - 2x + 2 - 1 = 4y + 3 \\ &\iff (x-1)^2 = 4y + 4 \\ &\iff (x-1)^2 = 4(y+1) \end{aligned}$$

Luego, el vértice es $V = (1, -1)$, así que el centro del círculo es $O = (1, -1)$.

Sustituyendo en la ecuación C tenemos que

$$C \; : \; (x-1)^2 + (y+1)^2 = r^2$$

(ii) Además el punto $P = (4, -5)$ esta en el círculo, e.e.

$$\begin{aligned} P = (4, -5) \in C &\iff (4-1)^2 + (-5+1)^2 = r^2 \\ &\iff 9 + 16 = r^2 \\ &\iff 25 = r^2 \\ &\iff r = 5 \end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente, la ecuación pedida es:

$$C \; : \; (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

[1] Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 60'

(2) Identifique y determine los elementos de la sección cónica de ecuación general

$$\frac{9}{4}\,x^2 - 9x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

Solución

Etapa 1. Identificamos la sección cónica, usando la técnica de completamiento de cuadrados

$$\begin{aligned}
\frac{9}{4}\,x^2 - 9x + y^2 - 6y + 9 = 0 &\iff 9x^2 - 36x + 4y^2 - 24y + 36 = 0 \\
&\iff 9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 6y) + 36 = 0 \\
&\iff 9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 6y + 9 - 9) + 36 = 0 \\
&\iff 9(x-2)^2 - 36 + 4(y-3)^2 - 36 + 36 = 0 \\
&\iff 9(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 36 \\
&\iff \frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36} \\
&\iff \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1
\end{aligned}$$

Etapa 2. Luego, la sección cónica es una elipse con:

(i) Centro en $(2,3)$

(ii) $a = 3$ y $b = 2$

(iii) $c = \sqrt{5}$

(iv) $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(v) Focos en $(2, 3 \pm \sqrt{5})$

(vi) Vértices en $(2,6)$ y $(2,0)$

(vii) Vértices secundarios en $(4,3)$ y $(0,3)$