Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Industrial

Álgebra[1] - Control N° 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
12 de Abril del 2003

(1) Factorice la siguiente expresión

$$p(x) = 6(x-4)^3 + 7(x-4)^2 - 3(x-4)$$

solución

$$\begin{aligned}
6(x-4)^3 + 7(x-4)^2 - 3(x-4) &= (x-4)(6(x-4)^2 + 7(x-4) - 3) \\
&= (x-4)(6x^2 - 48x + 96 + 7x - 28 - 3) \\
&= (x-4)(6x^2 - 41x + 65) \\
&= (x-4)(x - \frac{5}{2})(x - \frac{13}{3})
\end{aligned}$$

(2) Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x+19} - \sqrt{x+28} = -1$$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+19} - \sqrt{x+28} = -1 &\Longrightarrow (\sqrt{x+19} - \sqrt{x+28})^2 = (-1)^2 \\
&\Longrightarrow (x+19) - 2\sqrt{x+19}\sqrt{x+28} + (x+28) = 1 \\
&\Longrightarrow 2\sqrt{x+19}\sqrt{x+28} = 2x + 46 \\
&\Longrightarrow \sqrt{x+19}\sqrt{x+28} = x + 23 \\
&\Longrightarrow (\sqrt{x+19}\sqrt{x+28})^2 = (x+23)^2 \\
&\Longrightarrow (x+19)(x+28) = x^2 + 46x + 529 \\
&\Longrightarrow x^2 + 47x + 532 = x^2 + 46x + 529 \\
&\Longleftrightarrow x = -3
\end{aligned}$$

[1]Cada problema vale 2 puntos

(3) Determine si la siguiente proposición lógica es una tautología. Justifique su respuesta:

$$(p \Longrightarrow [q \vee r]) \Longleftrightarrow (\sim [q \vee r] \Longrightarrow \sim p)$$

Solución 1:

Si llamamos $s = q \vee r$ entonces debemos mostrar que:

$$p \Longrightarrow s \Longleftrightarrow \sim s \Longrightarrow \sim p$$

p	s	$\sim p$	$\sim s$	$p \Longrightarrow s$	$\Longleftrightarrow$	$\sim s \Longrightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Luego es una Tautología.

Otras soluciones son resolver una tabla con las tres proposiciones o bien usando propiedades.

(4) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula:

$$F(n): \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{ es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución

Etapa 1: p.d.q $F(1)$ es verdadera

Por una parte

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Por otra parte

$$\frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Luego, $F(1)$ es verdadera

Etapa 2:Hipótesis de Inducción

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad (H)$$

es verdadera

Etapa 3: Tesis de Inducción:

p.d.q. $F(n+1)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ es verdadera

En efecto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i(i+1)}{2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2))}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}
\end{aligned}$$

Luego $F(n)$ es verdadera $\forall n; n \in \mathbb{N}$