Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Industrial

Álgebra[1] - Solución Control Nº 1-Pep 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
4 de Junio del 2004

(1) Define en $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}\}$, para $u_1 = (x_1, y_1)$ y $u_2 = (x_2, y_2)$, elementos arbitrarios de $\mathbb{R}^2$, las siguientes operaciones:

- $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $u_1 - u_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Además, si $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$ define la relación $\Re$ en $\mathbb{R}^2$

$$u_1 \,\Re\, u_2 \Longleftrightarrow (u_1 - u_2) \in \mathbb{W}$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución

- $\Re$ es una relación reflexiva

  En efecto

  Sea $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $u - u = (0,0) \in \mathbb{W}$, pues $0 + 2 \cdot 0 = 0$

  Luego, $u \Re u$ y entonces $\Re$ es una relación reflexiva.

- $\Re$ es una relación simétrica

  En efecto

  Supongamos que $u = (x,y)$ y $v = (a,b)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $u \Re v$

[1] Cada problema vale 3.0 puntos
Tiempo 60'

$$
\begin{aligned}
u\Re v &\Longleftrightarrow (u-v)\in\mathbb{W}\\
&\Longleftrightarrow ((x,y)-(a,b))\in\mathbb{W}\\
&\Longleftrightarrow (x-a,y-b)\in\mathbb{W}\\
&\Longrightarrow (x-a)+2(y-b)=0\\
&\Longrightarrow -(a-x)-2(b-y)=0\\
&\Longrightarrow (-1)[(a-x)+2(b-y)]=0\\
&\Longrightarrow (a-x)+2(b-y)=0\\
&\Longrightarrow v\Re u
\end{aligned}
$$

Luego $\Re$ es una relación simétrica

- $\Re$ es una relación transitiva

  En efecto

  Supongamos que $u_1=(x_1,y_1)$, $u_2=(x_2,y_2)$ y $u_3=(x_3,y_3)$ en $\mathbb{R}^2$ tal que. $u_1\Re u_2 \quad \wedge \quad u_2\Re u_3$

  Entonces

$$
\left.\begin{array}{lcl}
u_1\Re u_2 & \Longleftrightarrow & (x_1-x_2,y_1-y_2)\in\mathbb{W}\\
u_2\Re u_3 & \Longleftrightarrow & (x_2-x_3,y_2-y_3)\in\mathbb{W}
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\underline{\begin{array}{lcl}
(x_1-x_2)+2(y_1-y_2) & = & 0\\
(x_2-x_3)+2(y_2-y_3) & = & 0
\end{array}}\right|
$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & \Downarrow & \\
(x_1-x_3)+2(y_1-y_3) & = & 0\\
 & \Downarrow & \\
(x_1-x_3,y_1-y_3) & \in & \mathbb{W}\\
 & \Downarrow & \\
u_1 & \Re & u_3
\end{array}
$$

Así que $\Re$ es una relación transitiva y en conjunto con las propiedades anteriores es una relación de equivalencia.

(b) Determine $\overline{(2,-1)}$. La clase de equivalencia del elemento $(2,-1)$.

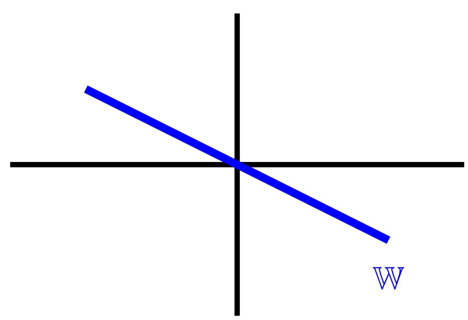
Solución

$$\begin{aligned}
u \in \overline{(2,-1)} &\iff u \in \mathbb{R}^2 \wedge u\Re(2,-1)\\
&\iff u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge (x,y)\Re(2,-1)\\
&\iff u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge (x-2,y+1)\in\mathbb{W}\\
&\iff u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge (x-2)+2(y+1)=0\in\mathbb{W}\\
&\iff u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge x-2+2y+2=0\in\mathbb{W}\\
&\iff u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge x+2y=0\in\mathbb{W}\\
&\iff u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge (x,y)\in\mathbb{W}\\
&\iff u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge u\in\mathbb{W}\\
&\iff u\in\mathbb{W}
\end{aligned}$$

Así que $\overline{(2,-1)} = \mathbb{W}$

(c) Grafique $\overline{(2,-1)}$ en el plano $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{W}$ corresponde a la recta $L:\ x+2y=0$ ó $L:\ y=-\dfrac{1}{2}x$



$L:\ x+2y=0$

(2) Considere las funciones $f:\mathbb{A}\longmapsto\mathbb{B}$ y $g:\mathbb{B}\longmapsto\mathbb{C}$. demuestre que:

$$f \text{ biyectiva } \wedge\ g \text{ biyectiva } \Longrightarrow g\circ f \text{ biyectiva}$$

En efecto

- Supongamos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\implies g(f)(x) = g(f)(y) \\
&\implies f(x) = f(y) \qquad (g \text{ inyectiva}) \\
&\implies x = y \qquad\qquad (f \text{ inyectiva})
\end{aligned}
$$

  Luego,$(g \circ f)$ es inyectiva.

- Sea $c \in \mathbb{C}$, como g es sobreyectiva entonces existe $b \in \mathbb{B}$ tal que

$$g(b) = c \qquad\qquad (*)$$

  Como f es sobreyectiva entonces existe $a \in \mathbb{A}$ tal que

$$f(a) = b \qquad\qquad (**)$$

  .

  Sustituyendo (**) en (*) tenemos que $g(f(a)) = c$. Así que existe $a \in \mathbb{A}$ tal que

$$(g \circ f)(a) = c$$

  Por tanto, $(g \circ f)$ es sobreyectiva y entonces biyectiva.