Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil Industrial

Álgebra[1] - Solución Control Nº 1-Pep 4

Profesor Ricardo Santander Baeza

22 de Octubre del 2004

(1) Sea $\mathbb{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$

Solución

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + 2y - 3z = 0 \\ &\iff u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \wedge x = -2y + 3z = 0 \\ &\iff u = (-2y + 3z, y, z, t) \ \wedge \ (y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \\ &\iff u = y(-2,1,0,0) + z(3,01,0) + t(0,0,0,1) \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{W} = \langle\{(-2,1,0,0),(3,0,1,0),(0,0,0,1)\}\rangle \leq \mathbb{R}^4$

(b) Determine una base de $\mathbb{W}$

Solución

Si $\alpha = \{(-2,1,0,0),(3,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ entonces α genera $\mathbb{W}$ y para ver que es Li, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_1(-2,1,0,0) + a_2(3,01,0) + a_3(0,0,0,1) &= (0,0,0,0) \\ &\Downarrow \\ (-2a_1 + 3a_2, a_1, a_2, a_3) &= (0,0,0,0) \\ &\Downarrow \\ a_1 = a_2 &= a_3 = 0 \end{aligned}$$

Así que α es una base $\mathbb{W}$

[1] Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 60'

(2) Sea $\alpha = \{\sin x, \cos x\} \subset D = \{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ derivable en } \mathbb{R}\}$. Demuestre que α es Li. en D.

Solución

Supongamos que: $a_1 \sin x + a_2 \cos x = 0$ entonces tenemos que

$(a_1 \sin x + a_2 \cos x)' = 0$. Así que tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} a_1 \sin x & + & a_2 \cos x & = & 0 \\ a_1 \cos x & - & a_2 \sin x & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} a_1 \sin x \cos x & + & a_2 \cos^2 x & = & 0 \\ a_1 \cos x \sin x & - & a_2 \sin^2 x & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow a_2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Longrightarrow a_2 = 0$$

Analogamente

$$\left.\begin{array}{rcrcl} a_1 \sin x & + & a_2 \cos x & = & 0 \\ a_1 \cos x & - & a_2 \sin x & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} a_1 \sin^2 x & + & a_2 \cos x \sin x & = & 0 \\ a_1 \cos^2 x & - & a_2 \sin x \cos x & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow a_1(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Longrightarrow a_1 = 0$$

Así que el conjunto es Li.

(3) Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ tal que $w_j = \sum_{i=1}^{j} 2v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Demuestre que β es también una base de $\mathbb{V}$.

Solución

$$a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = 0_{\mathbb{V}} \implies 2(a_1 + \cdots + a_n)v_1 + 2(a_2 + \cdots + a_n)v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_{\mathbb{V}}$$

$$\implies \left.\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + a_n & = & 0 \\ a_n & = & 0 \end{array}\right| \quad (\text{ Pues } \alpha \text{ es Li})$$

$$\implies a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0 \quad \text{y entonces } \beta \text{ es Li}$$

Para mostrar que es un sistema de generadores, hacemos lo siguiente:

Si $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es base existen únicos escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} a_iv_i \tag{1}$$

Ahora β genera el espacio $\mathbb{V}$ si tiene solución la ecuación: $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_iw_i$.

Pero,

$$\begin{aligned} u = \sum_{j=1}^{n} b_jw_j &\implies u = \sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{i=1}^{j} 2v_i\right) \\ &\implies u = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)v_1 + \left(\sum_{j=2}^{n} b_j\right)v_2 + \cdots + \left(\sum_{j=n-1}^{n} b_j\right)v_{n-1} + \left(\sum_{j=n}^{n} b_j\right)v_n \end{aligned}$$

Como la representación (1) es única para u entonces debe suceder que:

$$\left.\begin{array}{rcl} b_1 + b_2 + \cdots + b_n & = & a_1 \\ b_2 + \cdots + b_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} + b_n & = & a_{n-1} \\ b_n & = & a_n \end{array}\right| \quad \text{y luego,} \quad \begin{array}{lcl} b_1 & = & a_1 - a_2 \\ b_2 & = & a_2 - a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & = & a_{n-1} - a_n \\ b_n & = & a_n \end{array}$$

Así que

$$u = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{b_1} w_1 + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{b_2} w_2 + \cdots + \underbrace{(a_{n-1} - a_n)}_{b_{n-1}} w_{n-1} + \underbrace{a_n}_{b_n} w_n$$

Por tanto genera $\mathbb{V}$, y entonces es una base.