Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil Industrial

Álgebra[1] Solución Control N^o 2-Pep 4

Profesor Ricardo Santander Baeza

8 de Noviembre del 2004

(1) Dadas las bases del espacio vectorial real $\mathbb{V}$, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} 2v_i$, para $1 \leq j \leq n$. Determine $[I]_\alpha^\beta$ y $[I]_\beta^\alpha$

Solución

1. Por definición de la base β, tenemos que

$$
\begin{aligned}
w_1 = 2v_1 & \Longrightarrow & v_1 = \frac{1}{2}w_1 \\
w_2 = 2v_1 + 2v_2 & \Longrightarrow & v_2 = \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \\
w_3 = 2v_1 + 2v_2 + 2v_3 & \Longrightarrow & v_3 = \frac{1}{2}(w_3 - w_2) \\
\vdots \quad & \vdots & \vdots \\
w_n = 2v_1 + \dots + 2v_n & \Longrightarrow & v_n = \frac{1}{2}(w_n - w_{n-1})
\end{aligned}
$$

2. Por definición de las matrices cambio de base tenemos que:

$$
[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2}
\end{pmatrix} \quad \text{análogamente} \quad [I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix}
2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\
0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\
0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 2 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2
\end{pmatrix}
$$

(2) Determine $T \in \mathbb{L}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que

[1] Cada problema vale 2,0 puntos
Tiempo 60'

(a) $Img(T) = \langle\{(1,1,1)\}\rangle$

Solución

Podemos usar cualquier base de $\mathbb{R}^2$, usemos por simplicidad la base canónica:

Define:

$$\begin{array}{rcl} T(1,0) & = & (1,1,1) \\ T(0,1) & = & (0,0,0) \end{array}$$

Luego, $T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT(1,0) + yT(0,1)$

Así que una alternativa de definición es $T(x,y) = (x,x,x)$.

(b) Una T construida en las condiciones de encima, ¿puede ser inyectiva?. Justifique su respuesta.

No puede ser inyectiva, pues del teorema de la dimensión, sigue que

$$\begin{array}{rcl} \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^2) = \dim_{\mathbb{K}}(ker(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(Img(T)) & \Longrightarrow & 2 = \dim_{\mathbb{K}}(ker(T)) + 1 \\ & \Longrightarrow & \dim_{\mathbb{K}}(ker(T)) = 1 \end{array}$$

(3) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\left.\begin{array}{c} T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \text{ inyectiva} \\ \wedge \\ \alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \text{ Li en } \mathbb{V} \end{array}\right\} \Longrightarrow T(\alpha) := \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_s)\} \text{ Li en } \mathbb{W}$$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_sT(v_s) = 0 & \Longrightarrow & T(a_1v_1) + T(a_2v_2) + \cdots + T(a_sv_s) = 0_{\mathbb{W}} \\ & \Longrightarrow & T(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s) = 0_{\mathbb{W}} \\ & \Longrightarrow & (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s) \in ker(T) \\ & \Longrightarrow & a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s = 0_{\mathbb{V}} \quad (T \text{ inyectiva}) \\ & \Longrightarrow & a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 0 \quad (\alpha \text{ Li en } \mathbb{V}) \end{array}$$

Así que $T(\alpha)$ es L.i. en $\mathbb{W}$