Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Industrial

Álgebra[1] solución Control N^o 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
23 de Abril del 2003

1. Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula:

   $F(n): \quad n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible por 9 es verdadera $(\forall n : n \in \mathbb{N})$

   Solución

Etapa 1 P.d.q. $F(1)$ es verdadera.

En efecto

$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 32 = 9 \cdot 4.$

Luego $F(1)$ es verdadera.

Etapa 2 Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. Es decir, existe q, tal que

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9 \cdot q \qquad (H)$

Etapa 3 Tesis de Inducción.

P.d.q. $F(n+1)$ es verdadera, es decir p.d.q. existe r, tal que

$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9 \cdot r$

En efecto

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= 3n^3 + 18n^2 + 42n + 36\\ n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9\end{aligned}$$

Dividiendo tenemos que:

[1] Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 60'

$$
\begin{array}{lllll}
 & 3n^3+18n^2+42n+36 & : & 3n^3+9n^2+15n+9 & = \quad 1 \\
(-) & & & & \\
 & 3n^3+9n^2+15n+9 & & & \\
 & ----------- & & & \\
 & 9n^2+27n+27 & & &
\end{array}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 &= 1\cdot(3n^3+9n^2+15n+9)+9n^2+27n+27 \\
&\overset{(H)}{=} 9\cdot q+9\cdot(n^2+3n+3) \\
&= 9\underbrace{(q+n^2+3n+3)}_{r}
\end{aligned}
$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n : n\in\mathbb{N})$

2. Si $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ es uma Progresión Aritmética que verifica simultaneamente las condiciones:

   (a) d=40

   (b) La suma de los 20 primeros términos es 650 (Es decir, $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} a_i = 650$)

   entonces determine a_{10}

   Solución

Etapa 1 Sea $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ la Progresión Aritmética pedida.

Etapa 2 Datos

(i) $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ es una Progresión Aritmética entonces

$$\begin{aligned}
650 &= \frac{20}{2}(2a_1 + 19 \cdot 40)\\
&= 10 \cdot (2a_1 + 760)\\
&\Downarrow\\
65 &= (2a_1 + 760)\\
&\Downarrow\\
a_1 &= -695
\end{aligned}$$

Luego, $a_{10} = -695 + 9 \cdot 40 = -335$

Etapa 3

3. La suma de los p primeros términos de una p.a. es igual a La suma de los q primeros términos con $p \neq q$. Demuestre que la suma de los $p+q$ primeros términos de la progresión es igual a cero.

   Solución

   Si S_p representan la suma de los p-primeros términos y S_q la suma de los q-primeros términos entonces tenemos que:

   (a) Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ la progresión aritmética dada y S_{p+q} la suma de sus $(p+q)$ primeros términos entonces:

   $$S_{p+q} = \frac{p+q}{2}(2a_1 + (p+q-1)d) \qquad (*)$$

   (b) Por otra parte, tenemos que:

   $$\begin{aligned}
   S_p = S_q &\iff \frac{p}{2}(2a_1 + (p-1)d) = \frac{q}{2}(2a_1 + (q-1)d)\\
   &\iff 2a_1p + p(p-1)d = 2a_1q + q(q-1)d\\
   &\iff 2a_1p - 2a_1q = q(q-1)d - p(p-1)d\\
   &\iff 2a_1(p-q) = [q(q-1) - p(p-1)]d\\
   &\iff 2a_1(p-q) = [q^2 - q - p^2 + p)]d\\
   &\iff 2a_1(p-q) = [q^2 - p^2 + p - q)]d\\
   &\iff 2a_1(p-q) = [(q-p)(q+p) + p - q)]d\\
   &\iff 2a_1(p-q) = [(-(q+p)+1)](p-q)d\\
   &\Longrightarrow 2a_1 = (1-q-p)d \qquad (**)
   \end{aligned}$$

   Así que sustituyendo $(**)$ en $(*)$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
S_{p+q} &= \frac{p+q}{2}((1-q-p)d+(p+q-1)d) \\
&= \frac{p+q}{2} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$