Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil Industrial

Álgebra[1]

Solución Control Nº 1 - PEP 3

Profesor Ricardo Santander Baeza

03 de Septiembre del 2004

(1) Considere la matriz $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Determine la matriz $B = A(1) + A(2) - A(3)$

Solución

$$\begin{aligned} B &= A(1) + A(2) - A(3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Pruebe que $A(n)A(m) = A(n+m)$

Solución

$$\begin{aligned} A(n)A(m) &= \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & 2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+m) & (m^2 + 2nm + n^2) \\ 0 & 1 & (2n + 2m) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (n+m) & (n+m)^2 \\ 0 & 1 & 2(n+m) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(m+n) \end{aligned}$$

(c) Muestre que $A^3(1) = A(3)$

Solución

$A^3(1) = A(1)A(1)A(1) = A(2)A(1) = A(3)$ Usando la propiedad (b).

[1] Cada problema vale 3 puntos

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} -\alpha & (\alpha-1) & (\alpha+1) \\ 1 & 2 & 3 \\ (2-\alpha) & (\alpha+3) & (\alpha+7) \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$U(A) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid A \in U(3)\}$$

Solución

$$\begin{aligned} \alpha \in U(A) &\iff \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ A \in U(3) \\ &\iff \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} -\alpha & (\alpha-1) & (\alpha+1) \\ 1 & 2 & 3 \\ (2-\alpha) & (\alpha+3) & (\alpha+7) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & (3\alpha-1) & (4\alpha+1) \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & (3\alpha-1) & (4\alpha+1) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (3\alpha-1) & (4\alpha+1) \\ (3\alpha-1) & (4\alpha+1) \end{pmatrix} \\ &= 0 \qquad (\forall \alpha; \alpha \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Así que. $U(A) = \emptyset$