Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Industrial

Solución del Control N^o 3-Pep 2
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
18 de Junio del 2004

1. Determine la ecuación de una recta L, que es perpendicular a la recta L_1 : $2x+5y+3=0$, y pasa por la intersección de las rectas $L_2 : x-2y+1=0$ y $L_3 : 2x+y-1=0$

Solución

Etapa 1.
Sea $L \quad : \quad y = mx+n$, la recta pedida.

Etapa 2. Análisis de datos

(i) $L \perp L_1 \Longleftrightarrow m\cdot m_{L_1} = -1$, donde m_{L_1} es la pendiente de L_1

Así que debemos determinar la pendiente de L_1 que es un dato del problema

$$\begin{aligned} 2x+5y+3=0 &\Longleftrightarrow y = -\frac{2}{5}\,x - \frac{3}{5} \\ &\Longrightarrow m_{L_1} = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} m\cdot m_{L_1} = -1 &\Longleftrightarrow m\cdot -\frac{2}{5} = -1 \\ &\Longrightarrow m = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en L, tenemos que

$$L \quad : \quad y = \frac{5}{2}\,x + n$$

(ii) Además L pasa por la intersección de las rectas L_1 y L_2 entonces debemos determinar esa intersección.

$$
\begin{aligned}
P = (x, y) \in L_1 \cap L_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x - 2y + 1 &=& 0 \\ 2x + y - 1 &=& 0 \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcr} x - 2y &=& -1 \\ 4x + 2y &=& 2 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{5} \text{ e } y = \frac{3}{5} \\
&\Longrightarrow \quad P = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
P = (x, y) \in L \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} + n \\
&\Longrightarrow \quad n = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Así que, $L \quad : \quad y = \dfrac{5}{2}\,x + \dfrac{1}{10}$

2. Determine una función cuadrática $y = q(x)$ tal que pasa por los puntos de intersección de las funciones cuadráticas $q_1(x) = x^2 - 9$ y $q_2(x) = -1 - x^2$, y además intersecta al eje y en el punto $P = (0, -2)$

   Solución

   Etapa 1.

   Sea $q(x) = ax^2 + bx + c$ la función cuadrática pedida.

   Etapa 2. Análisis de datos:

   (i) $graf(q)$ pasa por la intersección de los gráficos de q_1 y q_2 así que debemos determinar esa intersección.

$$
\begin{aligned}
P=(x,y)\in graf(q_1)\cap graf(q_2) &\iff x^2-9=-1-x^2\\
&\implies 2x^2=8\\
&\implies x^2=4\\
&\implies x=\pm 2\\
&\implies x_1=2\wedge x_2=-2
\end{aligned}
$$

Así que, $P_1=(x_1,q_1(x))=(2,-5)$ y $P_2=(x_2,q_2(x))=(-2,-5)$
Sustituyendo en q, tenemos que

$$
\begin{array}{rcl}
-5=a\cdot(2)^2+b\cdot 2+c & \iff & -5=4a+2b+c\\
-5=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c & \iff & -5=4a-2b+c\\
 & \Downarrow & \\
4b & = & 0\\
 & \Downarrow & \\
b=0 & \wedge & -5=4a+c \qquad (*)
\end{array}
$$

(ii) Además $graf(q)$ intersecta al eje y en el punto $P=(0,-2)$. Lo cual significa que:

$$-2=q(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$$

Por tanto $c=-2$ y sustituyendo en (*) tenemos que $-5=4a-2$ y $a=-\dfrac{3}{4}$

Finalmente

$$q(x)=-\frac{3}{4}\,x^2-2$$