Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Industrial

1	
2	
3	
Nota	

Álgebra[1] - Solución Control Nº 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
5 de Mayo del 2003

1. El producto de tres números en progresión geométrica es 64. Si al primero se le suma 1, al segundo se le adicionan 5 y al último se le suma 19, se obtiene una nueva progresión geométrica. Determine ambas progresiones.

Solución

Etapa 1 Sean $G_1 = \{x, y, z\}$ y $G_2 = \{x+1, y+5, z+19\}$, las progresiones geométicas pedidas.

Etapa 2 Datos

(i)G_1 es una progresión geométrica si: $x = \frac{y}{r}$ y $x = yr$. Luego

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{\frac{y}{r}, y, yr\right\} \\ G_2 &= \left\{\frac{y}{r}+1, y+5, yr+19\right\} \end{aligned}$$

(ii) Además,

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot z = 64 &\implies \frac{y}{r} \cdot y \cdot yr = 64 \\ &\implies y^3 = 64 \\ &\implies y = \sqrt[3]{64} \\ &\implies y = 4 \end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 2.0 puntos
Tiempo 60'

Así que,

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{\frac{4}{r}, 4, 4r\right\} \\ G_2 &= \left\{\frac{4}{r} + 1, 9, 4r + 19\right\} \end{aligned}$$

(iii)Ahora, G_2 es también una progresión geométrica si:

$$\frac{9}{\frac{4}{r} + 1} = \frac{4r + 19}{9}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 81 &= 16 + \frac{76}{r} + 4r + 19 \\ &\Downarrow \\ 81r &= 35r + 4r^2 + 76 \\ &\Downarrow \\ 2r^2 - 23r + 38 &= 0 \\ &\Downarrow \\ r = 2 &\wedge \ r = \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Etapa 3 Finalmente tenemos una solución para $r = 2$

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{\frac{4}{2}, 4, 4 \cdot 2\right\} = \{2, 4, 8\} \\ G_2 &= \left\{\frac{4}{2} + 1, 9, 4 \cdot 2 + 19\right\} = \{3, 9, 27\} \end{aligned}$$

2. Si en una progresión geométrica el tercer término es 8 y el sexto es 64 entonces determine la progresión.

Etapa 1 Sea $G = \{a_1, a_1 r, 8, \dots\}$, la progresión pedida.

Etapa 2 Datos

(i) G es una progresión geométrica entonces tenemos que $a_{n+1} = a_1 r^n$, así que

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & a_1 r^2 \\ 64 & = & a_1 r^5 \\ & \Downarrow & \\ \dfrac{8}{64} & = & \dfrac{r^2}{r^5} \\ & \Downarrow & \\ \dfrac{1}{8} & = & \dfrac{1}{r^3} \\ & \Downarrow & \\ r & = & 2 \end{array}$$

(ii) Si $r = 2$ entonces $a_1 = 2$ y entonces $G = \{2, 4, 8, \dots\}$

3. Determine el término independiente de x (si existe) en el desarrollo binomial

$$\left(3x^3 - \frac{4}{x}\right)^{24}$$

Solución

Etapa 1 Sea t_{k+1} el término pedido

Etapa 2 Datos

(i) t_{k+1} es un término del desarrollo binomial si: $t_{k+1} = \binom{24}{k}(3x^3)^{24-k}\ \dfrac{(-4)^k}{x^k}$

Así que,

$$t_{k+1} = \binom{24}{k}(3)^{24-k}x^{72-4k}\ (-4)^k$$

(ii) Ahora, t_{k+1} es el término pedido si $72 - 4k = 0$ y entonces $k = 18$—

Etapa 3 Finalmente sustituyendo tenemos que el término pedido es:

$$t_{19} = \binom{24}{18}(3)^6\ (-4)^{18}$$